Matemática II

1º semestre – 2010/11

Economia, Finanças e Gestão

Exercícios com soluções

(Actualizado a 17/09/2010)

1 Complementos de Álgebra Linear

1.1. Para cada uma das matrizes seguintes, calcule os valores próprios e, se forem reais, determine os vectores próprios correspondentes, identificando em cada caso as multiplicidades algébrica e geométrica

a) $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Solução: a) $\lambda_1 = -5,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (c, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
$\lambda_2 = -1,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (7/3c, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
b) O polinómio característico não tem raízes reais ($\lambda_1 = 4 + 2i,\ \lambda_2 = 4 - 2i$);
c) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2};\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = ((1 + \sqrt{2})c, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2};\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = ((1 - \sqrt{2})c, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
d) $\lambda = 0,\ m.a. = 2$; vectores próprios $u = (c, 0)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
e) $\lambda_1 = 2,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (c, 0, 0)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
$\lambda_2 = 3,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (0, c, 0)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
$\lambda_3 = 4,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (0, 0, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
f) $\lambda_1 = 3,\ m.a. = 2$; vectores próprios $u = (-c, 0, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
$\lambda_2 = -1,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (c, 0, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
g) $\lambda_1 = 0,\ m.a. = 2$; vectores próprios $u = (-c_1 - c_2, c_1, c_2)$, com c_1 e c_2 não simultaneamente nulos, $m.g. = 2$;

$\lambda_2 = 3,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (c, c, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
h) $\lambda = 1,\ m.a. = 3$; vectores próprios $u = (c, 0, 0)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
i) $\lambda_1 = 2,\ m.a. = 2$; vectores próprios $u = (c_1, c_1, c_2)$, com c_1 e c_2 não simultaneamente nulos, $m.g. = 2$;
$\lambda_2 = 0,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (-c, c, 0)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$.

1.2. Prove que

a) λ é um valor próprio de A sse for valor próprio de A^T;

b) se λ for valor próprio de A e $|A| \neq 0$, então $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio da matriz inversa A^{-1};

c) se λ for valor próprio de A então λ^k é valor próprio da matriz $A^k,\ k \in \mathbb{N}$.

1.3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

a) Calcule os valores próprios de A e os respectivos vectores próprios;

b) Determine os valores próprios e vectores próprios de A^{100} (sugestão: use um dos resultados enunciados no exercício anterior).

Solução: a) $\lambda_1 = -5,$ vectores próprios $u = (-2/3c, c)$, com $c \neq 0$, ;
$\lambda_2 = 5,$ vectores próprios $u = (c, c)$, com $c \neq 0$, ;
b) $\lambda = 5^{100},$ vectores próprios $u = (-2/3c_1, c_1) + (c_2, c_2)$, com c_1, c_2 não simultaneamente nulos;

1.4. Considere a matriz A e o vector $\mathbf{x}$ definidos por

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

a) Identifique o polinómio característico, $P(\lambda)$, associado à matriz A;

b) Determine os valores próprios de A;

c) Calcule $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$;

d) Sejam $a = 1$ e $b = -3$. Sem efectuar qualquer cálculo, mostre que existe um vector $\mathbf{x}$ não nulo, para o qual $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$;

e) Classifique $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ para todos os possíveis valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

Solução: a) $P(\lambda) = (b - \lambda)(-\lambda)(2a - \lambda)$; b) $\lambda_1 = b, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2a$; c) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = ax^2 + 2axy + ay^2 + bz^2$;
e) SDP se $(a = 0\ e\ b > 0)$ ou $(a > 0\ e\ b = 0)$ ou $(a > 0\ e\ b > 0)$;
SDN se $(a = 0\ e\ b < 0)$ ou $(a < 0\ e\ b = 0)$ ou $(a < 0\ e\ b < 0)$;
Ind. nos restantes casos, isto é, $(a > 0\ e\ b < 0)$ ou $(a < 0\ e\ b > 0)$.

1.5. Classifique as seguintes formas quadráticas

a) $q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

b) $q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

c) $q(x, y) = x^2 - y^2$

d) $q(x, y, z) = x^2 + 4xy - 2xz + 7y^2 - 3z^2$

e) $q(x, y, z) = x^2 - 4xy + 4xz - z^2$

f) $q(x, y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$

g) $q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$

h) $q(x, y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2$

i) $q(x, y, z) = 3y^2 + 4xz$

j) $q(x, y) = x^2 + 4xy + ay^2$ (onde $a \in \mathbb{R}$).

Solução: a)SDP b)SDP c)Ind. d)Ind. e)Ind. f)DP g)Ind. h)Ind. i)Ind. j)Ind se $a < 4$, SDP se $a = 4$ e DP se $a > 4$.

1.6. Classifique as seguintes matrizes simétricas (quanto a serem definidas positivas, semi-definidas positivas, negativas, semi-definidas negativas ou indefinidas)

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$ i) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solução: a)DP b)Ind. c)DP d)Ind. se $a < 4$, SDP se $a = 4$ e DP se $a > 4$ e)Ind. f)SDP g)Ind. h)Ind. se $a < -\sqrt{2} \vee a > \sqrt{2}$, DP se $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ e SDP se $a = \pm\sqrt{2}$ i)DN j) Ind.

2 Funções de várias variáveis: limites e continuidade

2.1. Determine os domínios das seguintes funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ e represente-os graficamente

$$a) f(x,y) = \frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{1-\ln x} \qquad b) f(x,y) = \frac{\sqrt{e-e^x}}{\ln(4-x^2-y^2)} \qquad c) f(x,y) = \ln(x-y)^2$$

$$d) f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x+y}}{\ln x^2 - \ln(3-x)^2} \qquad e) f(x,y) = \ln(x-y)\sqrt{(y-x)(x^2+y^2-1)}$$

Solução: a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge x \neq e \wedge x^2+y^2 \leq 9\}$ b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1 \wedge x^2+y^2 < 4 \wedge x^2+y^2 \neq 3\}$ c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq 3/2\}$ e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y > 0 \wedge x^2+y^2-1 < 0\}$

2.2. Represente graficamente o domínio D_f, indique analiticamente $int\{D_f\}$, $fr\{D_f\}$ e D'_f e diga, justificando, se D_f é aberto ou fechado, se é limitado e se é compacto, para cada uma das seguintes funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$:

$$a) f(x,y) = \frac{|x|-4}{\ln(4-x^2-y^2)} \qquad b) f(x,y) = \sqrt{x(1-x)} + \frac{\ln(x^2-y)}{\sqrt{y+x}}$$

$$c) f(x,y) = \sqrt{y+x-1}.\ln(4-(x+1)^2-(y-1)^2) \qquad d) f(x,y) = \sqrt{x-|y|} + \sqrt{2-y^2-x}$$

$$e) f(x,y) = x\sqrt{y^2-4} + \sqrt[4]{16-x^2-y^2}$$

Solução: a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4-x^2-y^2 > 0 \wedge \ln(4-x^2-y^2) \neq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4 \wedge x^2+y^2) \neq 3\}$, $int(D_f) = D_f$, $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4 \vee x^2+y^2 = 3\}$, $D'_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$. D_f é aberto, não é fechado, é limitado mas não é compacto.

b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(1-x) \geq 0 \wedge x^2-y > 0 \wedge y+x > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge -x < y < x^2\}$, $int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \wedge -x < y < x^2\}$, $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = x^2 \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (y = -x \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (x = 1 \wedge -x \leq y \leq x^2)\}$, $D'_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (-x \leq y \leq x^2)\}$. D_f não é aberto nem fechado, é limitado mas não é compacto.

c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y+x-1 \geq 0 \wedge 4-(x+1)^2-(y-1)^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1-x \wedge (x+1)^2+(y-1)^2 < 4\}$, $int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1-x \wedge (x+1)^2+(y-1)^2 < 4\}$, $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1-x \wedge (x+1)^2+(y-1)^2 \leq 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1-x \wedge (x+1)^2+(y-1)^2 = 4\}$, $D'_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1-x \wedge (x+1)^2+(y-1)^2 \leq 4\}$. D_f não é aberto nem fechado, é limitado mas não é compacto.

d)$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-|y| \geq 0 \wedge 2-y^2-x \geq 0\}$, $int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-|y| > 0 \wedge 2-y^2-x > 0\}$, $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-|y| = 0 \wedge 2-y^2-x \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-|y| \geq 0 \wedge 2-y^2-x = 0\}$, $D'_f = D_f$. D_f não é aberto, é fechado, é limitado e portanto é compacto.

e)$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2-4 \geq 0 \wedge 16-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 2 \vee y \leq -2) \wedge x^2+y^2 \leq 4\}$, $int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y > 2 \vee y < -2) \wedge x^2+y^2 < 4\}$, $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = 2 \vee y =$

$-2) \wedge x^2+y^2 \leq 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 2 \vee y \leq -2) \wedge x^2+y^2=4\}$, $D'_f = D_f$. D_f não é aberto, é fechado, é limitado e portanto é compacto.

2.3. Determine o domínio da função f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2-4)}{|x|-4}.$$

Faça a sua representação gráfica e mostre que D_f é um conjunto aberto e ilimitado. Averigue se $ext(D_f)$ também é aberto e ilimitado.

Solução: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4 > 0 \wedge |x|-4 \neq 0\}$. $Ext(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}$ e portanto é um conjunto aberto e limitado.

2.4. Determine o interior, a fronteira e os pontos de acumulação dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$a)A = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ $\qquad$ $b)B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$

$c)C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y = (-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Solução: a) $int(A) = \emptyset, fr(A) = A, A' = \emptyset$. b) $int(B) = \emptyset$, $fr(B) = B \cup \{(0,0)\}$, $B' = \{(0,0)\}$. c) $int(C) = \emptyset$, $fr(C) = C \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y = 0\}$, $C' = fr(C)$.

2.5. Calcule os seguintes limites de sucessões de pontos em $\mathbb{R}^2$ (caso existam):

a) $\lim \left(\left(\frac{2n^2+3}{1+2n^2}\right)^{n^2}, \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right)$ $\quad$ b) $\lim \left((n^3+n)-(n^2+1), \sqrt{n}.\frac{\sqrt{n}+3}{(\sqrt{n}+1)^2} \right)$

c) $\lim \left(n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right), \sin\frac{n\pi}{2} \right)$

Solução: a) $(e, -\frac{1}{2})$; b) $(+\infty, 1)$; c) não existe.

2.6. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim \overline{x}_n$, com $\overline{x}_n = \left[\frac{n}{2n+1}, \left(1+\frac{2}{n}\right)^n, \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right]$

b) $\lim \overline{x}_n$ com $\overline{x}_n = \left[\sqrt{n}-\sqrt{n-1},\ \left(\sqrt[n]{e}-1\right).n,\ n.\ln\frac{n+2}{n}, \left(1-\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}.\left(\frac{n^2+1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{3}} \right]$

Solução: a) $(1/2, e^2, 1)$; b) $(0, 1, 2, (1/2)^3)$.

2.7. Estude a existência de limite no ponto (0,0) para as seguintes funções

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x(x+y)}$ b) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ f) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

g) $f(x,y) = \dfrac{x^2(x+y)}{x^2 + y^2}$ h) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2 + 2x^3}{x^2 + y^2}$, i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}\sqrt{x^2 + y^2}, & \text{se } x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } y < 0. \end{cases}$

Solução: a) Não existe b) 0 c) Não existe d) 0 e) Não existe f) Não existe g) 0 h) Não existe i) Não existe.

2.8. Determine, caso exista, o prolongamento por continuidade à origem de cada uma das funções do exercício anterior.

Solução: Relativamente às alíneas em que o limite não existe, não é possível obter o referido prolongamento. Relativamente às outras, basta definir o valor da função na origem como sendo o respectivo limite. Por exemplo, na alínea b) o prolongamento é

$$\begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}.$$

2.9. Estude a existência dos seguintes limites

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-3)} \frac{\sqrt{(x-1)(y+3)} + \sin(x-1)(y+3)}{\sqrt{(x-1)(y+3)}}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{3(x-2)^2(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ *d)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2 - y^2 - 1}{x - 1}$ *f)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2\sqrt{|y-1|}}{x^2 + (y-1)^2}$ *h)* $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

Solução: a) não existe b) 1 c) 0 d) não existe e) não existe f) 1 g) 0 h) 0.

2.10. Considere a função f de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}.$$

a) Indique o domínio de f.

b) Mostre que $x^3 - y^3$ é multiplo de $x - y$.

c) Pode a função f ser prolongada por continuidade à recta $y = x$?

Solução: a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$. c) Sim, basta definir o valor de f em pontos da recta como sendo $f(x,x) = 3x^2$.

2.11. Considere a função $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 - y^2}$.

a) Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),y=x+x^2} f(x,y)$. O que pode concluir sobre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

b) Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),y=mx} f(x,y)$, $|m| \neq 1$. O que pode concluir sobre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Solução:

a) $-\frac{1}{2}$. Se existir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, é $-\frac{1}{2}$. b) 0. Não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $(0 \neq -\frac{1}{2})$.

3 Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

3.1. Determine as derivadas parciais de primeira ordem de cada uma das seguintes funções e defina os respectivos domínios:

a) $f(x,y,z) = 3xy + x^2 - zy + z^2$; b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - yx, & y \neq x \\ x, & y = x. \end{cases}$

Solução: a) $f'_x = 3y + 2x$; $f'_y = 3x - z$; $f'_z = -y + 2z$; $\mathcal{D}f'_x = \mathcal{D}f'_y = \mathcal{D}f'_z = \mathbb{R}^3$
b) $f'_x = 2x - y$ se $x \neq y$ e $f'_x = 0$ se $x = y = 0$; $f'_y = -x$ se $x \neq y$ e $f'_y = 0$ se $x = y = 0$
$\mathcal{D}f'_x = \mathcal{D}f'_y = \mathbb{R}^2 \backslash \{(a,a) : a \neq 0\}$

3.2. Mostre que $f(x,y) = \dfrac{x - y + 1}{x + y}$ é solução da equação diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x + y}$$

em qualquer dos semiplanos abertos $x + y > 0$ ou $x + y < 0$.

3.3. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-y} - (x - y + 1)}{x - y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de $f(x,y)$ no ponto (1,1).

b) Verifique que $f'_x(a,a) + f'_y(a,a) = 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Solução:

a) f é contínua no ponto $(1,1)$.

3.4. Dada a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases},$$

indique segundo que vectores existe derivada direccional na origem e calcule o seu valor.

Solução: $\partial_{\overrightarrow{v}} f(0,0)$ existe para $\overrightarrow{v} = (\alpha, \alpha)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nesse caso, $\partial_{\overrightarrow{v}} f(0,0) = 0$.

3.5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases},$$

a) Mostre que a função admite derivada direccional na origem segundo qualquer vector e calcule-a.

b) Mostre também que f não é contínua em $(0,0)$.

c) Sem fazer qualquer cálculo, indique o valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Solução: a) $\partial_{(\alpha,\beta)} f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{\beta^2}{\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3.6. Estude a diferenciabilidade das seguintes funções nos pontos indicados e escreva as expressões dos respectivos diferenciais de primeira ordem (no caso das funções diferenciáveis):

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, no ponto (0,0);

b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x \neq y \\ x+1, & x = y \end{cases}$, em (1,1);

c) $f(x,y) = \begin{cases} xy - 2y + 3x, & x \neq y \\ x^2y^2 + 3x - 2y, & x = y \end{cases}$, em (0,0);

d) $y = (x^2+1, x)$, em $x = 1$;

Solução:
a) f é diferenciável em $(0,0)$; $Df(0,0)(\mathbf{h}) = 0$; b) f não é diferenciável em $(1,1)$; c) f é diferenciável em $(0,0)$; $Df(0,0)(\mathbf{h}) = 3h_1 - 2h_2$; d) y é diferenciável em $x = 1$; $Df(1)(\mathbf{h}) = (2h, h)$.

3.7. Escreva as expressões do diferencial de primeira ordem das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x,y) = y^x$, num ponto genérico (a,b), com $b > 0$;

b) $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{\sqrt{x_3 - 1}}$, no ponto (1,-3,2).

Nota: Admita à partida que as funções são diferenciáveis.

Solução: a) $Df(a,b)(\mathbf{h}) = b^a \log b.h_1 + ab^{a-1}.h_2$ b) $Df(1,-3,2)(\mathbf{h}) = h_1 - h_2 - 2h_3$.

3.8. Mostre que são contínuas e que não são diferenciáveis nos pontos indicados, as funções

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3x(y-2)^2 + x^3}{x^2 + (y-2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,2) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,2), \end{cases}$ em $(0,2)$;

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = y = 0, \end{cases}$ em $(0,0)$;

c) $h(x,y) = \sqrt{|x|} \cos y$, em $(0,0)$.

3.9. Utilize a regra da derivação da função composta para calcular

a) $\dfrac{df}{dt}$, onde $f = x^2y^3$, sendo $x = te^t$ e $y = t^2 + 1$;

b) $\dfrac{df}{dt}$, onde $f = u^2 + v^3$, sendo $u = \dfrac{x}{y}$, $v = (x+2y)^3$ e $x = \dfrac{1}{t}$, $y = tg\ t$;

c) $\dfrac{dz}{dt}$, supondo que $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ e $x = \cos t$, $y = \sin t$.

d) $\nabla f(1,1)$, onde $f(x,y) = \sin(2u - v^3 + w)$, sendo $u = e^{x^2-y}$, $v = xy^2$ e $w = x^3y^2$;

e) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,1)$, onde $f(x,y,z) = (u^2 - 3v)^5$, com $u = e^{\frac{xy}{z}}$ e $v = \ln(y^2z^3)$;

f) $\nabla f(1,2,3)$, onde $f(x,y,z) = g(u,v,w)$, com $u = 5x + 3z$, $v = 8x + 2y$, $w = -y + z$ e sabendo que $\nabla g(14,12,1) = (4,5,6)$.

Solução:
a) $\frac{df}{dt} = 2te^{2t}(t+1)(t^2+1)^3 + 6t^3e^{2t}(t^2+1)^2$;
b) $\frac{df}{dt} = -2\frac{1}{t^3}\frac{1}{tg^2\ t} - 2\frac{1}{t^2}\frac{\sec^2 t}{tg^3\ t} + 9(-\frac{1}{t^2} + 2\sec^2 t)(\frac{1}{t} + 2tg\ t)^8$; c) $\frac{dz}{dt} = 2 - 4\sin^2 t$; d) $\nabla f(1,1) = (4\cos 2, -6\cos 2)$; e) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = 30$; f) $\nabla f(1,2,3) = (60,4,18)$.

3.10. Se a função $f(u,v,w)$ é diferenciável no ponto $u = x - y$, $v = y - z$ e $w = z - x$, prove que, com $F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \equiv 0.$$

3.11. Dada a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2y^2}{(x-1)^2+y^2}, & (x,y) \neq (1,0) \\ 0, & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

a) Determine as funções derivadas $g'_x(x,y)$ e $g'_y(x,y)$, indicando onde são definidas.

b) Mostre que $g'_x(x,y)$ e $g'_y(x,y)$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

c) Estude a diferenciabilidade da função no ponto (1,0).

d) Estude a continuidade da função no ponto (1,0).

Solução:

a) $g'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(x-1)y^4}{((x-1)^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (1,0) \\ 0, & (x,y) = (1,0) \end{cases}$ $\quad g'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(x-1)^4 y}{((x-1)^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (1,0) \\ 0, & (x,y) = (1,0) \end{cases}$

Assim, $D_{g'_x} = D_{g'_y} = \mathbb{R}^2$. c) g é diferenciável em (1,0). d) g é contínua em (1,0).

3.12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e mostre que é descontínua em (0,0).

c) Verifique que f é diferenciável na origem.

d) Calcule $\partial_{(\frac{3}{5},\frac{4}{5})} f(0,0)$.

e) Estude a continuidade de f na origem.

Solução:

a) $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$;

$b) f'_y(x,y) = \begin{cases} 2y\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$; d) 0; e) f é contínua em (0,0).

3.13. Utilize a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

e o ponto (0,0) para mostrar que o facto de uma função ter derivadas parciais finitas num ponto não significa que seja contínua nesse ponto. A função dada será diferenciável no ponto (0,0)? Justifique.

Solução:

A função não é contínua em $(0,0)$, e portanto também não é diferenciável nesse ponto.

3.14. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Prove que f é contínua em (0,0).

b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Verifique que f não é diferenciável em (0,0). Sem fazer cálculos, o que pode concluir sobre a continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em (0,0)?

Solução:
b) $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ c) Como f não é diferenciável em $(0,0)$, pelo menos uma das funções f'_x ou f'_y (ou ambas) não são contínuas em $(0,0)$.

3.15. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x-y)}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x+y = 0 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f no ponto $(0,0)$ (sugestão: calcule o limite segundo a parábola de equação $y = -x + x^2$).

b) Calcule a função derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e estude a sua continuidade em (0,0).

c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

d) Mostre que $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq \delta_{\vec{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})}} f(0,0)$. Comente esse resultado.

Solução:

a) f não é contínua em (0,0).
b) $f'_x(x,y) = \frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}$ se $x+y \neq 0$ e $f'_x(x,y) = 1$ se $(x,y) = (0,0)$ (não existe $f'_x(a,-a), a \neq 0$); a função $f'_x(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$.
c) f não é diferenciável em $(0,0)$.
d) Os dois valores só teriam de ser iguais se a função f fosse diferenciável em $(0,0)$.

3.16. Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y}$, para $f(x,y,z) = z^2x^2y + xye^z$.

Solução: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2yz^2$, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y} = 4z$.

3.17. Calcule f''_{x^2}, f''_{xy} e f'''_{xyx} para cada uma das seguintes funções, indicando os respectivos domínios:

$$a)\ f(x,y) = x\sin(x+y); \qquad b)\ f(x,y) = \begin{cases} y\sin x, & y \neq 0 \\ 2, & y = 0 \end{cases}$$

Solução:
a) $f''_{x^2} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y)$, $f''_{xy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y)$ e $f'''_{xyx} = -2\sin(x+y) - x\cos(x+y)$.
b) $f''_{x^2} = -y\sin x$, $f''_{xy} = \cos x$ e $f'''_{xyx} = -\sin x$;

3.18. Calcule a segunda, terceira e quarta diferenciais de $f(x,y) = \sqrt{xy}$ no ponto (1,1).

Solução:
$D^2f(1,1)(\mathbf{h}^2) = -\frac{1}{4}h_1^2 + \frac{1}{2}h_1h_2 - \frac{1}{4}h_2^2$,
$D^3f(1,1)(\mathbf{h}^3) = \frac{3}{8}h_1^3 - \frac{3}{8}h_1^2h_2 - \frac{3}{8}h_1h_2^2 + \frac{3}{8}h_2^3$,
$D^4f(1,1)(\mathbf{h}^4) = -\frac{15}{16}h_1^4 + 4\frac{3}{16}h_1^3h_2 + 6\frac{1}{16}h_1^2h_2^2 + 4\frac{3}{16}h_1h_2^3 - \frac{15}{16}h_2^4$.

3.19. Escreva a expressão geral da n-ésima diferencial da função $f(x,y) = \sin(x+y)$ no ponto (0,0).

Solução: $D^nf(0,0)(\mathbf{h}) = \sum_{i=0}^{n} \sin(i\frac{\pi}{2})h_1^i h_2^{n-i}$

3.20. Mostre que $f(x,y) = log(e^x + e^y)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

3.21. Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ uma função real tal que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 1$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = f(y\text{sen } x, y^2).$$

Mostre que a matriz hessiana de g em $(0,0)$ é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

3.22. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = xy^2 + g(u,v,w), \text{ com } u = \operatorname{sen} y^2, \; v = \ln x \text{ e } w = ye^x.$$

Sabendo que a função g é de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$, calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0)$.

Solução: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = e\left(\frac{\partial^2 g}{\partial w \partial v}(0,0,0) + \frac{\partial g}{\partial w}(0,0,0)\right)$.

3.23. Mostre que as funções seguintes são homogéneas ou positivamente homogéneas. Determine o grau de homogeneidade e verifique a identidade de Euler:

a) $f(x,y) = \log \dfrac{(x+y)^2}{xy}$ b) $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}$ c) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Solução:

a) f é homogénea de grau 0;
b) f é positivamente homogénea de grau -1;
c) f é homogénea de grau 1.

3.24. Estude a homogeneidade de $g(x,y,z) = x^2 + x^\alpha y^{\beta-3} - z^{3\alpha} y^\beta$ e de $h(x,y) = \dfrac{x^3 y^\alpha + x^{\beta-1}}{y^{3-\beta}}$, fazendo a discussão em função dos parâmetros α e β reais:

a) Recorrendo directamente à definição.

b) Utilizando a identidade de Euler.

Solução:

g é homogénea de grau 2 para $\alpha = -\frac{3}{2}$ e $\beta = \frac{13}{2}$;
h é homogénea de grau $\alpha + \beta$ para $\beta = \alpha + 4, \alpha \in \mathbb{R}$.

3.25. Sendo $g(u,v)$ diferenciável em $\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x}\right)$, com $x, y \neq 0$, prove que a função

$$f(x,y,z) = x^2 . g\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x}\right),$$

verifica a identidade $x.f'_x + y.f'_y + z.f'_z \equiv 2.f$. Interprete este resultado em termos de homogeneidade.

Solução:

f é positivamente homogénea de grau 2.

3.26. Sendo $f(\mathbf{x})$ uma função de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ em $\mathbb{R}$, homogénea de grau zero e não constante, prove que não existe o $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x})$.

3.27. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3, em torno do ponto (1,1).

Solução:

$$\begin{aligned}\ln\frac{(1+h)(1+k)}{2+h+k} \quad &= \quad -\ln 2 + \tfrac{1}{4}h + \tfrac{1}{4}k + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{4}h^2 + \tfrac{1}{2}hk - \tfrac{1}{4}k^2\right) + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{3}{8}h^3 - 3\tfrac{1}{8}h^2k - 3\tfrac{1}{8}hk^2 + \tfrac{3}{8}k^3\right)\\ &\quad\ +r_4(h,k)\end{aligned}$$