

Programação Linear (PL)

Objectivos

Aprender a formular problemas em PL e a resolvê-los recorrendo ao *Solver/Excel* e graficamente.

Definições

Modelo de PL (exemplo protótipo)

$i = 1, 2, \dots, m$ recursos ou outras imposições do modelo (fábricas)

$j = 1, 2, \dots, n$ actividades (produtos).

Parâmetros do Modelo:

c_j ($j = 1, 2, \dots, n$) coeficientes da FO (lucro unitário associado ao produto j)

b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 2º membro ou termo independente (capacidade disponível da fábrica i)

a_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, m$) coeficiente técnico (capacidade gasta da fábrica i por cada unidade a fabricar do produto j).

Definindo x_j como o nível da actividade j ($j = 1, 2, \dots, n$) (unidades a produzir do produto j) e designado por Z a medida de desempenho total (lucro) a formulação em PL é:

Forma Standard:

$$Z^* = \text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{função objectivo (FO)}$$

s.a:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \dots, m & \text{restrições funcionais} \\ x_j \geq 0 & j = 1, \dots, n & \text{restrições de sinal} \end{cases}$$

A **solução** de um problema de PL é um vector de \mathbb{R}^n que representa o valor das variáveis.

Uma solução que satisfaça todas as restrições (funcionais e de sinal) designa-se por **Solução Admissível** (SA). Uma **Solução** diz-se **Não Admissível** (SNA) se não verifica pelo menos uma das restrições.

O conjunto de todas as soluções admissíveis designa-se por **Região Admissível** (RA).

Solução Óptima (SO) é uma solução admissível que origina o valor mais favorável para a função objectivo (FO).

Designam-se por **soluções óptimas alternativas** as diferentes soluções óptimas de um mesmo problema, caso existam.

Valor Óptimo (Z^*) é o valor da função objectivo numa solução óptima.

Hipóteses da PL

(H1) Proporcionalidade (num contexto de análise de actividades): ~~x_j~~

A contribuição de cada actividade (j) para o valor da função objectivo Z é proporcional ao nível da actividade ($c_j x_j$).

A contribuição de cada actividade para o primeiro membro de cada restrição funcional é proporcional ao nível da actividade ($a_{ij} x_j$).

(H2) Aditividade (num contexto de análise de actividades): ~~x_j, x_k~~

Num modelo de PL cada função é a soma das contribuições individuais das respectivas actividades.

(H3) Divisibilidade: $\forall j, x_j \in \mathbb{R}$.

(H4) Certeza: Num modelo de PL todos os parâmetros são constantes conhecidas.

Propriedades da PL

Propriedade 1: A região admissível de um problema de PL ou é um conjunto vazio ou é um conjunto convexo.

Propriedade 2: Se a região admissível de um problema de PL é não vazia e limitada, então existe solução óptima.

Propriedade 3: Se um problema de PL tem óptimo, então pelo menos um dos pontos extremos da região admissível é solução óptima.

Propriedade 4: Dado um problema de PL com óptimo, se um ponto extremo da região admissível não tem pontos extremos adjacentes com melhor valor para a função objectivo, então esse ponto extremo é solução óptima.

Resolução Gráfica de Problemas de PL

Exige-se a resolução gráfica de problemas com apenas duas variáveis de decisão.

- 1º) Representar a região admissível (RA)
 - a. identificar o semi-plano correspondente às restrições de sinal impostas
 - b. representar o semi-plano correspondente a cada uma das restrições funcionais (desenhar a recta associada e identificar o semi-plano associado à respectiva inequação / equação)
 - c. definir a RA como sendo o resultado da intersecção de todos os semi-planos identificados. Se $RA = \emptyset$ o problema é impossível, caso contrário prosseguir.
- 2º) Identificar, caso exista, o(s) ponto(s) óptimo(s):
 - a. representar uma recta de nível da FO (atribuindo um valor arbitrário a Z) e identificar o sentido de optimização
 - b. identificar o(s) pontos(s) da RA a que corresponde o melhor valor de Z (ou seja, identificar a(s) SO), ou concluir que o problema tem valor óptimo ilimitado (não tem solução óptima).

Resolução de Problemas de PL recorrendo ao Solver/Excel

Exemplo Protótipo 1 – numa folha de *Excel* são escritos os dados e todas as fórmulas (restrições e função objectivo) necessárias à resolução do problema. Usualmente considera-se uma coluna por variável de decisão (colunas “C” e “D”) e uma linha por cada restrição (linhas 3 a 5) e para a função objectivo (linha 6), onde se escrevem os respectivos parâmetros. Inicialmente atribui-se o valor zero às variáveis de decisão (linha 7). As fórmulas (coluna “E”) representam, respectivamente, o lado esquerdo das restrições e a função objectivo. Os termos independentes das restrições devem também ser incluídos (coluna “G”).

Dados

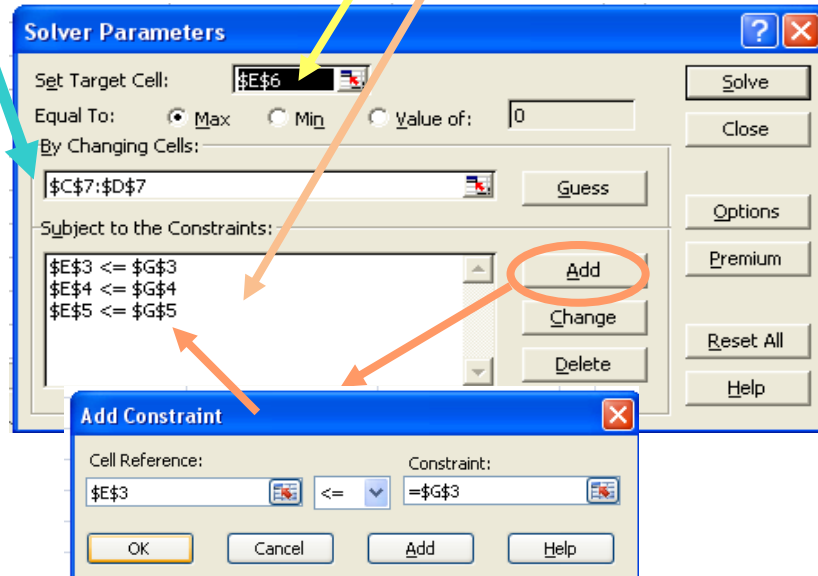
	A	B	C	D	E	F	G
2			de portas	de janelas			Disponibilidades
3		h-m de F1	1	0	0	≤	4
4		h-m de F2	0	2	0	≤	12
5		h-m de F3	3	2	0	≤	18
6		Lucro	3	5	0		
7		Nº de lotes	0	0			

	E
2	
3	=SUMPRODUCT(C3:D3;\$C\$7:\$D\$7)
4	=SUMPRODUCT(C4:D4;\$C\$7:\$D\$7)
5	=SUMPRODUCT(C5:D5;\$C\$7:\$D\$7)
6	=SUMPRODUCT(C6:D6;\$C\$7:\$D\$7)
7	

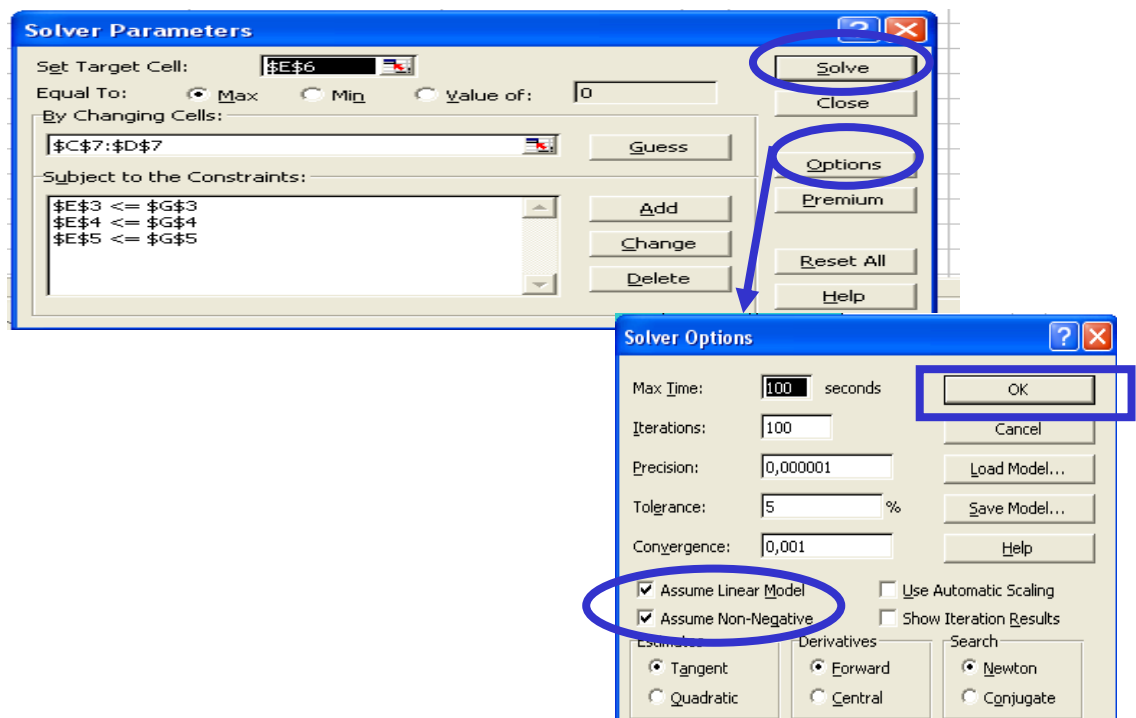
Valores Iniciais

Solver – Indicação da célula da função objectivo (E6), do objectivo (“Max” ou “Min”) e das células dos valores das variáveis de decisão (C7:D7). Junção (“Add”) das restrições funcionais do modelo (E3:E5<=G3:G5).

A	B	C	D	E	F	G
2		de portas	de janelas			Disponibilidades
3	h-m de F1	1	0	0	≤	4
4	h-m de F2	0	2	0	≤	12
5	h-m de F3	3	2	0	≤	18
6	Lucro	3	5	0		
7	Nº de lotes	0	0			



Solver – Nas opções indica-se que se trata de um modelo linear com variáveis não negativas e resolução (“Solve”)



Solução – Leitura da solução óptima ou da indicação de que se trata de um problema impossível ou com valor óptimo ilimitado. Escrita dos relatórios de resposta e de análise de sensibilidade.

	A	B	C	D	E	F	G
2			de portas	de janelas			Disponibilidades
3		h-m de F1	1	0	2	≤	4
4		h-m de F2	0	2	12	≤	12
5		h-m de F3	3	2	18	≤	18
6		Lucro	3	5	36		
7		Nº de lotes	2	6			

Solver Results

Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied.

Keep Solver Solution
 Restore Original Values

Reports: Answer, Sensitivity, Limits

OK Cancel Save Scenario... Help

Solução – Interpretação das soluções, utilizando os relatórios disponibilizados pelo Solver.

Microsoft Excel 9.0 Answer Report

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$E\$6	Lucro	0	36

→ Valor óptimo

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$C\$7	Nº de lotes de portas	0	2
\$D\$7	Nº de lotes de janelas	0	6

→ Solução óptima

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$E\$3	h-m de F1	2	\$E\$3<=\$G\$3	Not Binding	2
\$E\$4	h-m de F2	12	\$E\$4<=\$G\$4	Binding	0
\$E\$5	h-m de F3	18	\$E\$5<=\$G\$5	Binding	0

Microsoft Excel 9.0 Sensitivity Report

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$C\$7	Nº de lotes de portas	2	0	3	4,5	3
\$D\$7	Nº de lotes de janelas	6	0	5	1E+30	3

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$E\$3	h-m de F1	2	0	4	1E+30	2
\$E\$4	h-m de F2	12	1,5	12	6	6
\$E\$5	h-m de F3	18	1	18	6	6

Resposta – semanalmente deverão ser fabricados 2 lotes de portas e 6 de janelas. São utilizadas 2 h.-m. das 4 disponíveis em F1. As h.-m. disponíveis em F2 e F3, 12 e 18, respectivamente, são totalmente utilizadas.