Programação Linear (PL)

Objectivos

Aprender a resolver analiticamente alguns problemas de PL, recorrendo ao algoritmo do simplex.

Definições e Propriedades

Um PL está na ***forma aumentada*** se todas as variáveis são não negativas e todas as restrições funcionais estão expressas por equações, introduzindo, se necessário, variáveis não negativas, designadas por ***variáveis auxiliares*** (***variáveis desvio*** ou ***variáveis de folga***).

Uma ***solução aumentada*** é uma solução do problema aumentado.

Propriedade 5: Qualquer problema de PL pode ser escrito como um problema de PL equivalente na forma aumentada de maximização.

Passagem de Modelos de PL à Forma Aumentada de Maximização

(i) $Min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ➔ $Max(-Z) = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$ $\quad (Min\ Z = -Máx(-Z))$

(ii) Restrição de tipo '$\leq$': $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \ \wedge\ x_{n+i} \geq 0$

(iii) Restrição de tipo '$\geq$': $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \geq b_k \iff \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - x_{n+k} = b_k \ \wedge\ x_{n+k} \geq 0$

(iv) Variável Não Positiva: $x_j \leq 0 \iff x'_j = -x_j \geq 0$

(v) Variável Livre: x_j livre $\Rightarrow x_j = x'_j - x''_j$, com $\begin{cases} x'_j = Máx\{0; x_j\} \geq 0 \\ x''_j = Máx\{0; -x_j\} \geq 0 \end{cases}$

Soluções Básicas Admissíveis

Dado o problema aumentado com m equações e ℓ ($>m$) variáveis, se se atribuir o valor zero a $\ell - m$ variáveis – ***Variáveis Não Básicas*** (VNB) – e se for possível resolver, de forma única, o sistema de equações lineares em relação às restantes m variáveis – ***Variáveis Básicas*** (VB) – obtém-se uma ***Solução Básica*** (SB).

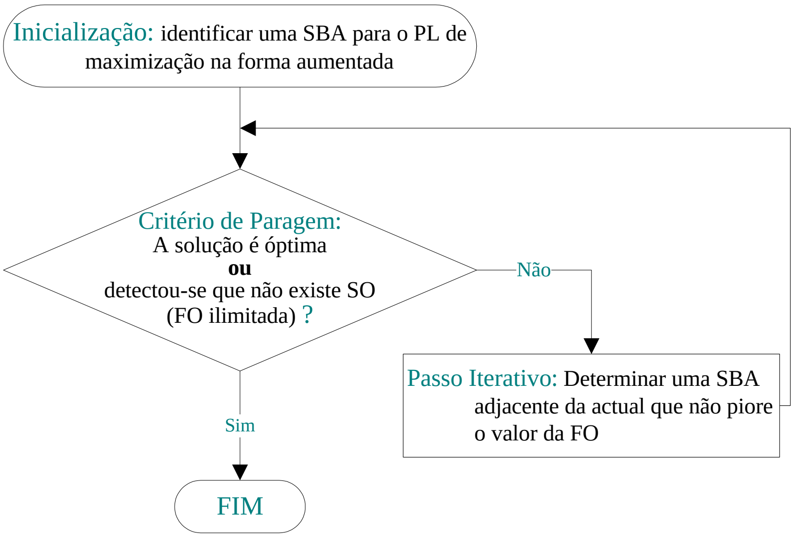
Uma ***Solução Básica*** diz-se ***Admissível*** (SBA) se todas as variáveis respeitarem as restrições de sinal. Caso não respeite as restrições de sinal diz-se uma ***Solução Básica Não Admissível*** (SBNA).

A cada solução básica admissível corresponde um só ponto extremo da região admissível (RA), também designado por ***solução de canto admissível***. Cada ponto extremo da RA tem associada pelo menos uma SBA.

Duas ***soluções básicas*** dizem-se ***adjacentes*** se os respectivos conjuntos de variáveis básicas apenas diferem por uma variável (e, consequentemente, os respectivos conjuntos de variáveis não básicas apenas diferem por uma variável). Graficamente, duas soluções de canto admissíveis são adjacentes se pertencerem ao mesmo segmento de recta.

Resolução Analítica de Problemas de PL

ALGORITMO DO SIMPLEX



Algoritmo do Simplex (George Dantzig, 1947)

Algoritmo para a resolução de um problema de PL na forma standard[(1)], com os termos independentes (RHS) não negativos.

Passo 1: Escrever o PL na forma aumentada

Passo 2: Determinar uma SBA
Fazer $k \leftarrow 1$

{Iteração k}

Passo 3: Se SBA corrente é óptima **FIM**
Senão, continuar para o passo **4**

Passo 4: Aplicar o "critério de entrada" para escolher x_p, a variável que se tornará VB

Aplicar o "critério de saída"
Se não conseguir **FIM** (FO ilimitada)
Se sim, seja x_r a variável escolhida para passar a VNB

Passo 5: Actualizar o quadro do Simplex obtendo a nova SBA (trocar as variáveis x_p e x_r)

Fazer $k \leftarrow k+1$
Voltar a **3**.

Observações: No passo 4, como "critério de entrada", de entre as variáveis com coeficiente negativo na linha da FO escolher x_p, a que tem associado o menor coeficiente. Como "critério de saída", e de forma a garantir a admissibilidade da solução, calcular o mínimo dos quocientes entre cada termo independente e o coeficiente positivo da respectiva linha e na coluna de x_p. A variável que passa a VNB, x_r, é a que está na linha associada ao menor dos quocientes determinados.

[(1)] O algoritmo do simplex pode ser adaptado para a resolução de qualquer problema de PL.