# Problema de Transportes (PT)

## Objectivos

Identificar, formular e resolver pelo *Solver*/*Excel* problemas de transporte.

## Definições e Propriedades

***Problema de Transportes*** (PT) – determinar como deve ser feito o transporte de um artigo homogéneo de um grupo de $m$ centros distribuidores – ***origens*** – para outro grupo de $n$ centros receptores – ***destinos*** –, minimizando o custo total de transporte.

### Parâmetros do Modelo:

$m$ – número de origens (locais onde o produto existe);

$s_i$ ($i=1,\ldots,m$) – ***oferta*** (unidades disponíveis) de produto na origem $i$;

$n$ – número de destinos (locais onde o produto é procurado);

$d_j$ ($j=1,\ldots,n$) – ***procura*** (unidades procuradas) de produto no destino $j$;

$c_{ij}$ ($i=1,\ldots,m$ ; $j=1,\ldots,n$) – custo unitário de transporte da origem $i$ para o destino $j$.

Assume-se que a oferta total iguala a procura total (o PT está equilibrado), ou seja:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \ .$$

Definindo $x_{ij}$ como as quantidades a transportar da origem $i$ ($i=1,\ldots,m$) para o destino $j$ ($j=1,\ldots,n$), a formalização do PT em programação linear é:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & i = 1,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & j = 1,\ldots,n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Nesta formulação, no primeiro conjunto de restrições ($i=1,\ldots,m$) impõe-se que a quantidade de produto a enviar de cada origem $i$ para os diferentes destinos iguale a sua oferta ($s_i$). É ainda escrita, no segundo conjunto ($j=1,\ldots,n$), uma restrição para cada vértice destino impondo que a quantidade de produto que chega a cada destino $j$, vindo das diferentes origens, iguale a sua procura ($d_j$). Com o terceiro grupo de condições garante-se que as quantidades a transportar de cada origem para cada destino são não negativas.

## Propriedades do PT

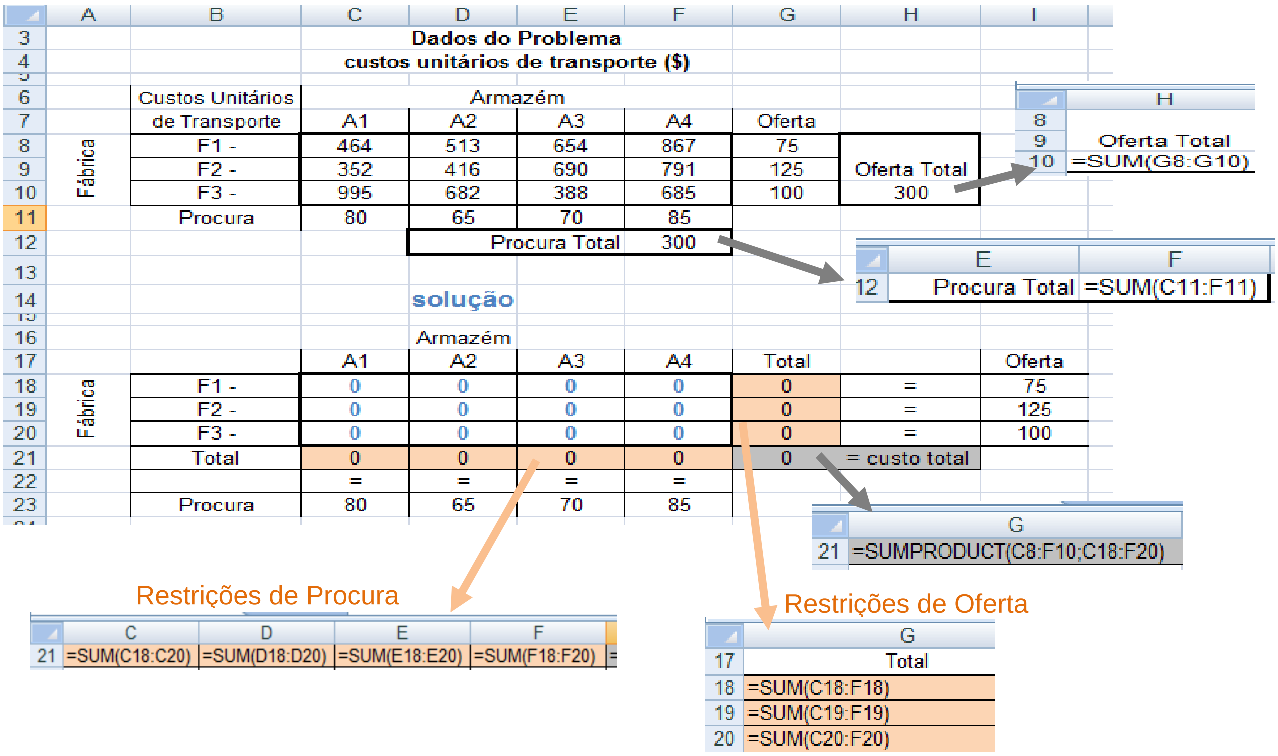
Propriedade **1**: Um PT tem pelo menos uma solução admissível.

Corolário: Um PT tem solução óptima.

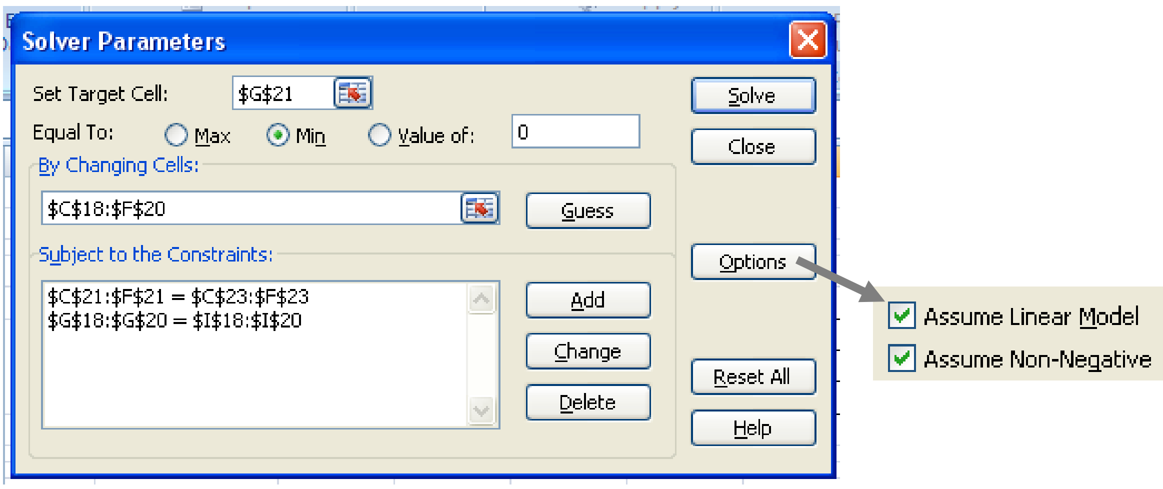
Propriedade **2**: Um PT com ofertas e procuras dadas por números inteiros tem pelo menos uma solução óptima em que todas as variáveis assumem valores inteiros.

## Resolução do PT recorrendo ao *Solver*/*Excel*

Exemplo Protótipo – P&T – numa folha de ***Excel*** é escrito o problema a resolver. Usualmente consideram-se duas tabelas: **i)** uma com os dados, custos unitários (C8:F10), ofertas (G8:G10) e procuras (C11:E11); e outra **ii)** com a solução (C18:F20), inicialmente nula, onde também se escrevem todas as fórmulas necessárias à resolução do problema, associadas às restrições (G18:G20 e C21:F21) e à função objectivo (G21). A relação entre a oferta total e a procura total é estabelecida pelas fórmulas escritas em H10 e F12.




***Solver*** – Indicação da célula da função objectivo (G21), do objectivo ("Mínimo" ou "Máximo") e das células dos valores das variáveis de decisão (C18:F20). Junção ("Add") das restrições funcionais (G18:G20=I18:I20 e C21:F21=C23:F23). Resolução do problema ("Solve").



***Solução*** – Interpretação da solução, utilizando a informação na folha de *Excel* ou o relatório de resposta do *Solver*.

| | | | Armazém | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | | | | | | | | | |
| 17 | | | A1 | A2 | A3 | A4 | Total | | Oferta |
| 18 | Fábrica | F1 - | 0 | 20 | 0 | 55 | 75 | = | 75 |
| 19 | | F2 - | 80 | 45 | 0 | 0 | 125 | = | 125 |
| 20 | | F3 - | 0 | 0 | 70 | 30 | 100 | = | 100 |
| 21 | | Total | 80 | 65 | 70 | 85 | 152535 | = custo total | |
| 22 | | | = | = | = | = | | | |
| 23 | | Procura | 80 | 65 | 70 | 85 | | | |

Microsoft Excel 10.0 Answer Report / Worksheet: [PT_prot_P&T.xls]Sheet1

Target Cell (Min)

| Cell | Name | Original Value | Final Value |
|---|---|---|---|
| $G$21 | Custo Total | 0 | 152535 |

Adjustable Cells

| Cell | Name | Original Value | Final Value |
|---|---|---|---|
| $C$18 | F1 - A1 | 0 | 0 |
| $D$18 | F1 - A2 | 0 | 20 |
| $E$18 | F1 - A3 | 0 | 0 |
| $F$18 | F1 - A4 | 0 | 55 |
| $C$19 | F2 - A1 | 0 | 80 |
| $D$19 | F2 - A2 | 0 | 45 |
| $E$19 | F2 - A3 | 0 | 0 |
| $F$19 | F2 - A4 | 0 | 0 |
| $C$20 | F3 - A1 | 0 | 0 |
| $D$20 | F3 - A2 | 0 | 0 |
| $E$20 | F3 - A3 | 0 | 70 |
| $F$20 | F3 - A4 | 0 | 30 |

**R:** A partir de **F1**, transportar *20* camiões para **A2** e *55* para **A4**; transportar *80* camiões de **F2** para **A1** e *45* para **A2**; de **F3** transportar *70* para **A3** e *30* para **A4**. O custo total associado a este plano é *152 535 u.m.*.

## Variantes do PT

### (1) Oferta Total > Procura Total

A oferta em cada origem representa um valor máximo a respeitar. Devem assim considerar-se as restrições associadas às origens como sendo de tipo: "$\leq$".

Na solução óptima a oferta excedentária, não sendo transportada, ficará retida em pelo menos uma origem. A interpretação da solução óptima, proporcionada pelo *Solver*, deve incluir referência às origens que têm oferta excedentária.

### (2) Oferta Total < Procura Total

A procura em cada destino representa um valor máximo a respeitar. Devem assim considerar-se as restrições associadas aos destinos como sendo de tipo: "$\leq$".

Na solução óptima, a procura excedentária representa procura que não será satisfeita em pelo menos um destino, devendo a interpretação da solução óptima referir este facto.

### (3) Destinos com procura mínima e máxima

Um destino em que seja possível satisfazer um qualquer valor de procura entre um mínimo e um máximo estabelecidos (se a oferta total estiver entre as procuras mínima e máxima totais) deve ter associadas duas restrições: uma de tipo "$\leq$" e referente à procura máxima e outra de tipo "$\geq$" associada à procura mínima.

A interpretação da solução, no respeitante a cada um destes destinos, deve referir, para além da procura efectivamente satisfeita, a quantidade de procura que fica aquém da máxima.

### (4) Origens com oferta mínima e máxima - análogo a (3).

### (5) Ligações impossíveis

Sendo impossível abastecer o destino *j* a partir da origem *i*, considera-se nula a respectiva variável, ou seja, $x_{ij}$=0. Neste caso, para obter a solução óptima no *Solver*, há que adicionar a nova restrição $x_{ij}$=0.

# Problema de Afectação (PA)

## Objectivos

Identificar, formular e resolver pelo *Solver*/*Excel* problemas de afectação.

***Problema de Afectação*** (PA) – determinar como deve ser feita a afectação de ***n*** indivíduos à realização de ***n*** tarefas, minimizando o custo total de afectação.

### Parâmetros do Modelo:

$n$ – número de indivíduos e de tarefas;

$c_{ij}$ $(i=1,\ldots,m\ ;\ j=1,\ldots,n)$ – custo de afectar o indivíduo $i$ à tarefa $j$.

Definindo $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o indivíduo } i \text{ é afecto à tarefa } j \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$ com $i, j = 1,\ldots,n$, a formalização do PA em programação linear é:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad \text{Minimização do custo total de afectação}$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,\ldots,n & \text{garantia de que cada indivíduo realiza uma só tarefa} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1,\ldots,n & \text{garantia de que cada tarefa é efectuada uma só vez} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad i, j = 1,\ldots,n & \text{definição das variáveis como vaiáveis binárias.} \end{cases}$$

Note-se que se impuser apenas $x_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1,\ldots,n)$ o problema acima formulado é um problema de transportes com ofertas e procuras unitárias.

Por outro lado, prova-se que sendo os termos independentes unitários, logo inteiros, existe pelo menos uma solução óptima inteira, e escrever $x_{ij} \in \{0,1\}$ $(i, j = 1,\ldots,n)$ equivale a $0 \leq x_{ij} \leq 1$ $(i, j = 1,\ldots,n)$. Tendo ainda em conta as restrições funcionais do PA, que igualam a um a soma de variáveis não negativas, nenhuma variável pode assumir valores superiores a um. Torna-se assim óbvio que a solução óptima do problema de afectação formulado pode ser obtida se as restrições $x_{ij} \in \{0,1\}$ $(i, j = 1,\ldots,n)$ forem substituídas pelas desigualdades $x_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1,\ldots,n)$. O PA é pois um caso particular do PT, em que as ofertas e as procuras são unitárias, sendo o número de origens igual ao de destinos.

O PA pode assim resolver-se recorrendo ao *Solver* e utilizando a mesma estrutura definida para a resolução do PT.

Note-se ainda que as variantes consideradas para o PT podem, de forma análoga, ser consideradas para o PA.