Programação Linear Inteira

Objectivos – aprender a formular e resolver pelo *Solver*/*Excel* e, se possível, graficamente problemas de programação linear inteira e de programação binária.

Definições

Um modelo de PL diz-se de **PLI *puro*** se todas as variáveis de decisão só podem assumir valores inteiros. Caso inclua variáveis reais e inteiras designa-se por modelo de **PLI *misto***.

Define-se ***relaxação linear*** de um PLI o PL resultante de ignorar as restrições de integralidade no problema inicial.

Parâmetros do Modelo:

c_j (j=1,2,…,n) coeficiente da j-ésima variável na FO;

b_i (i=1,2,…,m) 2º membro ou termo independente da i-ésima restrição;

a_{ij} (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n) coeficiente técnico.

Definindo x_j como o nível da actividade j (j=1,…,n) (unidades a produzir do produto j), e designando por Z a medida do desempenho total (lucro) a formalização em programação linear inteira é:

Problema inicial

$$\text{(PLI)}\quad Z^* = Max\, Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

$$\text{s.a:}\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i & i = 1,\ldots,m \\ x_j \ge 0 \ \text{ e inteiro} & j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Relaxação linear

$$\text{(PLR)}\quad Z_R^* = Max\, Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

$$\text{s.a:}\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i & i = 1,\ldots,m \\ x_j \ge 0 & j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Propriedade 1: Se Z^* é o valor óptimo de um PLI de maximização e Z_R^* é o valor óptimo da respectiva relaxação linear, então: $Z^* \le Z_R^*$.

Resolução Gráfica de Problemas de PLI

Ilustra-se a resolução gráfica de problemas com apenas duas variáveis de decisão. Começa por ser resolvido graficamente o problema linear associado e, caso a solução não verifique as restrições de integralidade, é identificada a região admissível (RA) do PLI, contida na RA do PLR. A partir da RA do PLI, a determinação da solução óptima faz-se de modo análogo ao estudado no capítulo 1 (PL).

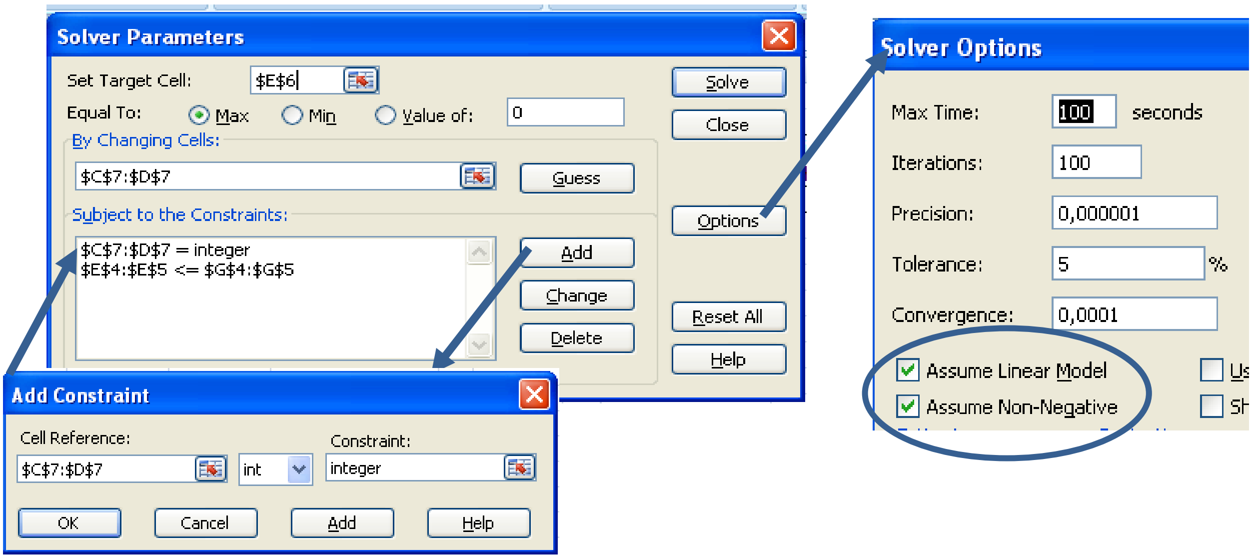
Resolução recorrendo ao *Solver*/*Excel*

Exercício 48 – *TBA AIRLINES* – numa folha de *Excel* é escrito o problema a resolver, utilizando a estrutura dos problemas de PL. As restrições de integralidade são introduzidas directamente no *Solver*.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	ex. TBA Airlines							
3			pequenos	grandes			Disponibilidades	Unidades
4		Investimento	5	50	0	≤	100	milhões de $
5		Restrição à Compra	1	0	0	≤	2	
6		Lucro anual	1	5	0			
7		Nº de aviões	0	0				

	E
4	=SUMPRODUCT(C4:D4;$C$7:$D$7)
5	=SUMPRODUCT(C5:D5;$C$7:$D$7)
6	=SUMPRODUCT(C6:D6;$C$7:$D$7)

Solver – Indicação da célula da função objectivo (E6), do objectivo ("Min" ou "Max") e das células das variáveis de decisão (C7:D7). Junção ("Add") das restrições funcionais (E4:E5<=G4:G5) e de integralidade (C7:D7=integer).



Solução – Interpretação da solução obtida, utilizando o relatório de resposta do *Solver* ou a informação na folha de *Excel* associada à formulação do problema.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	ex. TBA Airlines							
3			pequenos	grandes			Disponibilidades	Unidades
4		Investimento	5	50	100	≤	100	milhões de $
5		Restrição à Compra	1	0	0	≤	2	
6		Lucro anual	1	5	10			
7		Nº de aviões	0	2				

R: Comprar 2 aviões grandes, com um lucro estimado em \$10 *milhões*. O montante disponível para investimento é totalmente utilizado.

Formulações com Variáveis Binárias

Recorre-se a variáveis binárias sempre que se pretende formular opções que podem ser traduzidas por apenas dois valores, opções "binárias" (sim/não). O uso de variáveis binárias mostra-se também útil na formulação de disjunção de restrições, na caracterização de produtos mutuamente exclusivos ou complementares bem como na inclusão simultânea de custos fixos e variáveis.

Opções binárias - Resolução recorrendo ao *Solver/Excel*

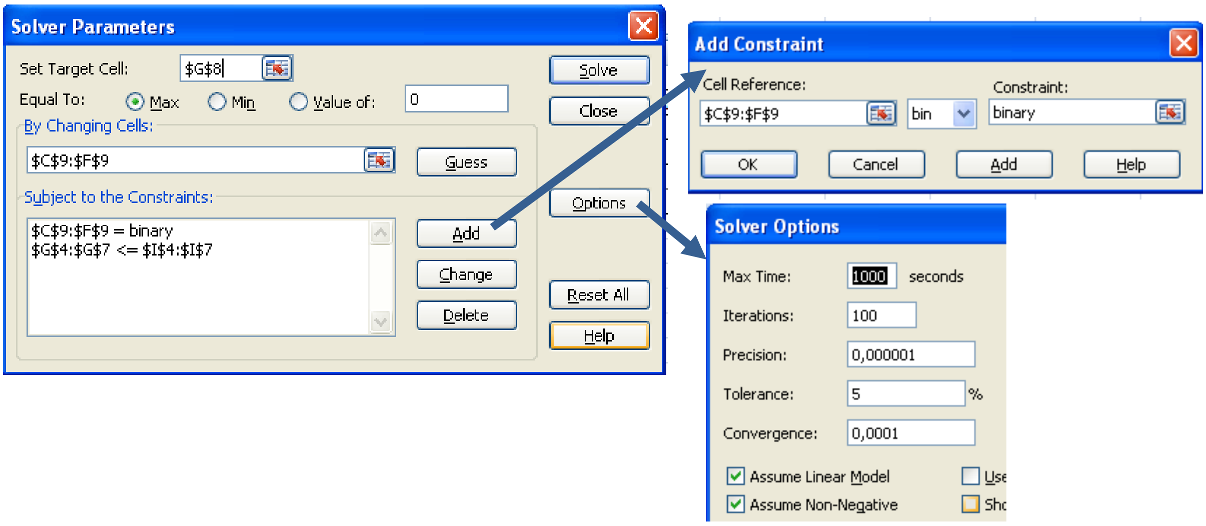
Exemplo Protótipo – *CALIFORNIA MANUFACTURING COMPANY* – numa folha de *Excel* é escrito o problema a resolver, como habitualmente, considerando nula a solução inicial.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	California Manufactuting Co.								
3			Fábrica LA	Fábrica SF	Arm LA	Arm SF			Disponibilidades
4		Investimento	6	3	5	2	0	≤	10
5		Só 1 armazém	0	0	1	1	0	≤	1
6		LA - Arm só se Fábrica	-1	0	1	0	0	≤	0
7		SF - Arm só se Fábrica	0	-1	0	1	0	≤	0
8		Lucro	9	5	6	4	0		
9			0	0	0	0			

	G
8	=SUMPRODUCT(C8:F8;$C$9:$F$9)

	G
4	=SUMPRODUCT(C4:F4;$C$9:$F$9)
5	=SUMPRODUCT(C5:F5;$C$9:$F$9)
6	=SUMPRODUCT(C6:F6;$C$9:$F$9)
7	=SUMPRODUCT(C7:F7;$C$9:$F$9)

Solver – Indicação da célula da função objectivo (G8), do objectivo ("Min" ou "Max") e das variáveis de decisão (C9:F9). Junção ("Add") das restrições funcionais (G4:G7<=I4:I7) e de indicação de quais variáveis são binárias (C9:F9=binary).



Solução – Interpretação da solução obtida, utilizando o relatório de resposta do *Solver* ou a informação na folha de *Excel* associada à formulação do problema.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	California Manufactuting Co.								
3			Fábrica LA	Fábrica SF	Arm LA	Arm SF			Disponibilidades
4		Investimento	6	3	5	2	9	≤	10
5		Só 1 armazém	0	0	1	1	0	≤	1
6		LA - Arm só se Fábrica	-1	0	1	0	-1	≤	0
7		SF - Arm só se Fábrica	0	-1	0	1	-1	≤	0
8		Lucro	9	5	6	4	14		
9			1	1	0	0			

R: Construir uma fábrica em LA e outra em SF, obtendo-se um lucro total de $14 *milhões*.

Problema do Custo Fixo

A inclusão, num modelo de PL, de custos fixos associados ao início de actividades pode modelar-se pela definição de variáveis binárias que indicarão se as actividades deverão ou não ser desencadeadas.

Parâmetros do Modelo:

Para além dos parâmetros anteriormente definidos (c_j; b_i; a_{ij} com $j=1,\ldots,n$; $i=1,\ldots,m$), define-se F_j ($j=1,\ldots,n$) o custo fixo associado à produção de j.

Designando por Z a medida do desempenho total (lucro) e definindo x_j como as unidades a fabricar do produto j ($j=1,\ldots,n$) e as variáveis binárias

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se o produto } j \text{ é fabricado} \\ 0 & \text{caso contrário (c.c.)} \end{cases}$$

a formalização em programação linear inteira é:

$$\text{(PLI)}\ \ Max\ \ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j - \sum_{j=1}^{n} F_j\, y_j \qquad \text{diferença entre o lucro e o custo fixo totais}$$

$$\text{s.a:}\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i \quad i = 1,\ldots,m & \text{restrições funcionais usuais} \\ x_j \le M\, y_j \quad j = 1,\ldots,n & \text{restrições de ligação} \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,n & \text{definição das variáveis,} \\ y_j \in \{0,1\} \quad j = 1,\ldots,n & \end{cases}$$

onde M é uma constante suficientemente grande.

Nesta formulação, as restrições de ligação, relacionando, para cada produto j, as respectivas variáveis binária e real, são necessárias para garantir que um produto só pode ser fabricado se o respectivo custo fixo for pago, ou seja que a variável x_j só pode assumir um valor positivo se a correspondente y_j for um. A constante M deve ser definida para que o valor de cada variável x_j seja limitado apenas pelas restrições funcionais e não pelas de ligação.

Exemplo Protótipo (cap. 1) – *Wyndor Glass Co.* – suponha-se que adicionalmente, a produção de portas e de janelas envolve custos fixos de 7 *u.m.* e de 13 *u.m.*, respectivamente. Há então que definir:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se o produto } j \text{ é fabricado} \\ 0 & \text{caso contrário (c.c.)} \end{cases} \quad (j=1,2)$$

com o índice $j=1$ relativo às portas e $j=2$ às janelas, mantendo as restantes variáveis reais: x_j ($j=1,2$) para representar os lotes do artigo j a fabricar. A formulação deste novo problema em PLI é:

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2 - 7y_1 - 13y_2$$

$$\text{s.a:}\ \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{cases} \text{restrições funcionais iniciais}$$

$$\begin{cases} x_1 \leq M\ y_1 \\ x_2 \leq M\ y_2 \end{cases} \text{restrições de ligação} \qquad \text{onde, por exemplo, } M=1000.$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \in \{0,1\}$$

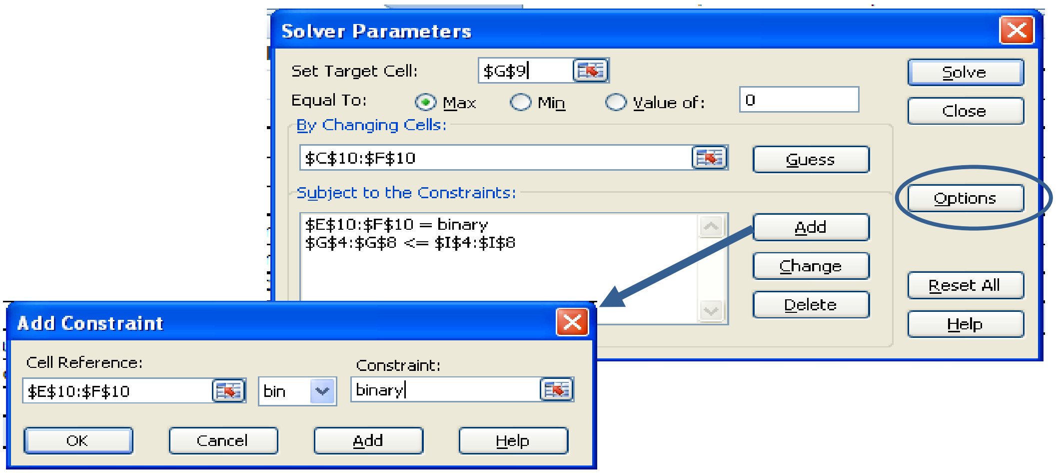
Resolução recorrendo ao *Solver*/*Excel*

Exemplo Protótipo (cap. 1) – *Wyndor Glass Co.* – numa folha de *Excel* é escrito o problema a resolver, em que as inequações de ligação se escrevem, na forma equivalente, $x_j - My_j \leq 0$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Wyndor Glass Co. com custos fixos								
2			Horas utilizadas na produção de um lote		Produz portas?	Produz janelas?				
3			de portas	de janelas	y1	y2			Disponibilidades	Rest.
4		h-m de F1	1	0	0	0	0	≤	4	funcionais
5		h-m de F2	0	2	0	0	0	≤	12	
6		h-m de F3	3	2	0	0	0	≤	18	
7		Ligação variáveis p/ portas	1	0	-1000	0	0	≤	0	ligação
8		Ligação variávies p/ janelas	0	1	0	-1000	0	≤	0	
9		Receita	3	5	-7	-13	0			
10		Nº de lotes	0	0	0	0				

	G
4	=SUMPRODUCT(C4:F4;C$10:F$10)
5	=SUMPRODUCT(C5:F5;C$10:F$10)
6	=SUMPRODUCT(C6:F6;C$10:F$10)
7	=SUMPRODUCT(C7:F7;C$10:F$10)
8	=SUMPRODUCT(C8:F8;C$10:F$10)
9	**=SUMPRODUCT(C9:F9;C$10:F$10)**

Solver – Indicação da célula da função objectivo (G9), do objectivo ("Min" ou "Max") e das células das variáveis de decisão (C10:F10). Junção ("Add") das restrições funcionais e de ligação (G4:G8<=I4:I8) e de indicação das variáveis que são binárias (E10:F10=bin).



Solução – Interpretação da solução obtida, utilizando o relatório de resposta do *Solver* ou a informação na folha de *Excel* associada à formulação do problema.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Wyndor Glass Co. com custos fixos**							
2			Horas utilizadas na produção de um lote		Produz portas?	Produz janelas?			
3			de portas	de janelas	y1	y2			Disponibilidades
4		h-m de F1	1	0	0	0	0	≤	4
5		h-m de F2	0	2	0	0	12	≤	12
6		h-m de F3	3	2	0	0	12	≤	18
7		Ligação variáveis p/ portas	1	0	-1000	0	0	≤	0
8		Ligação variávies p/ janelas	0	1	0	-1000	-994	≤	0
9		Receita	3	5	-7	-13	**17**		
10		**Nº de lotes**	**0**	**6**	**0**	**1**			

R: Fabricar 6 lotes de janelas (x_2=6; y_2=1) e não fabricar portas (x_1=0; y_1=0), obtendo-se uma receita total de 17 *u.m.*.

Produtos Mutuamente Exclusivos

A inclusão, num modelo de PL, de limitações quanto ao número máximo de actividades a desenvolver ou de actividades que não devem ser desenvolvidas em simultâneo pode também modelar-se pela definição de variáveis binárias que indicarão as actividades que deverão ser desencadeadas.

Parâmetros do Modelo:

Considere-se, como habitualmente, os parâmetros c_j; b_i; a_{ij} com $j=1,\ldots,n$; $i=1,\ldots,m$.

Assuma-se que se pretende fabricar não mais de $\boldsymbol{K}<n$ produtos e que os produtos r e s são mutuamente exclusivos, ou seja, não podem ser fabricados simultaneamente. Designando por Z a medida do desempenho total (lucro) e definindo x_j como as unidades a fabricar do produto j ($j=1,\ldots,n$) e as variáveis binárias

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se o produto } j \text{ é fabricado} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

a formalização em programação linear inteira é:

$$\text{(PLI)} \quad Max\, Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i \quad i=1,\ldots,m & \text{restrições funcionais usuais,} \\ x_j \le M\, y_j \quad j=1,\ldots,n & \text{restrições de ligação,} \\ \sum_{j=1}^{n} y_j \le K & \text{serão fabricados não mais de } K \text{ produtos,} \\ y_r + y_s \le 1 & r \text{ e } s \text{ nunca serão fabricados em simultâneo,} \\ x_j \ge 0 \quad j=1,\ldots,n & \\ y_j \in \{0,1\} \quad j=1,\ldots,n & \text{definição das variáveis,} \end{cases}$$

onde M é uma constante suficientemente grande.

A formulação e a resolução no *Solver/Excel* deste caso são idênticas às anteriormente apresentadas.

Disjunção de Restrições

A inclusão, num modelo de PL, de disjunção de restrições pode modelar-se pela definição de variáveis binárias que indicarão qual das restrições deve ser considerada como activa, devendo as restantes (não activas) ser redundantes.

Parâmetros do Modelo:

Considerem-se os parâmetros usuais c_j; $b_i>0$; $a_{ij}\geq 0$ com $j=1,\ldots,n$; $i=1,\ldots,m$.

Assuma-se que das duas restrições (R1; R2) apenas uma deve ser imposta, ou seja, devem ser consideradas em disjunção (ou R1 ou R2). Designando por Z a medida do desempenho total (lucro) e definindo x_j como as unidades a fabricar do produto j ($j=1,\ldots,n$) e as variáveis binárias

$$y_k=\begin{cases}1 & \text{se a restrição Rk está activa}\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}\qquad (k=1,2)$$

a formulação é:

$$\text{(PLI)}\quad Max\,Z=\sum_{j=1}^{n} c_j\,x_j$$

$$\text{s.a:}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,x_j \leq b_1+M\,(1-y_1) & \text{(R1)} & \\ & & \text{restrições em disjunção}\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,x_j \leq b_2+M\,(1-y_2) & \text{(R2)} & \\ y_1+y_2=1 & \text{(a)} & \text{apenas uma das restrições é activa}\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j \leq b_i \quad i=3,\ldots,m & & \text{restantes restrições funcionais usuais}\\ x_j\geq 0 \quad j=1,\ldots,n & & \text{definição das variáveis.}\\ y_k\in\{0,1\} \quad k=1,2 & & \end{cases}$$

Note-se que, sendo M uma constante suficientemente grande, se tem:

Se $y_1=1$	Se $y_1=0$
$\begin{cases}\text{(a)} \Rightarrow y_2=0 & \\ \text{(R1)} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,x_j\leq b_1 & \text{activa}\\ \text{(R2)} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,x_j\leq b_2+M & \text{redundante}\end{cases}$	$\begin{cases}\text{(a)} \Rightarrow y_2=1 & \\ \text{(R1)} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,x_j\leq b_1+\text{M} & \text{redundante}\\ \text{(R2)} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,x_j\leq b_2 & \text{activa.}\end{cases}$

E, desta forma, apenas uma restrição (a mais vantajosa) será escolhida para integrar a formulação do problema.

Exemplo Protótipo (cap. 1) – *Wyndor Glass Co.* – suponha-se que a fábrica **F3** pode ser substituída por outra fábrica, **F4**, com 52 horas de capacidade disponível por semana, e onde a montagem de cada lote de portas demora 3*h*, enquanto um lote de janelas utiliza 8*h* desta fábrica. Definindo:

$$y_k=\begin{cases}1 & \text{se a fábrica Fk é utilizada}\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}\qquad k=3,4,$$

e mantendo as restantes variáveis reais, a formulação deste novo problema em PLI é:

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 + M(1 - y_3) & \text{F3} \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 52 + M(1 - y_4) & \text{F4} \quad \text{onde, por exemplo, } M = 1000. \\ y_3 + y_4 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_3, y_4 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Resolução Gráfica

Neste contexto, de problemas com duas variáveis de decisão e em que se pretende quer a conjunção quer a disjunção de restrições, começa por se identificar a RA resultante das restrições em conjunção. No exemplo protótipo identifica-se a região correspondente a:

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

De seguida consideram-se as restrições em disjunção, ou seja intersecta-se a RA já identificada com:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad \vee \quad 3x_1 + 8x_2 \leq 52$$

Note-se que nestes casos a RA pode resultar não convexa. Representando uma recta de nível da função objectivo o ponto óptimo é identificado como habitualmente.

Resolução recorrendo ao *Solver*/*Excel*

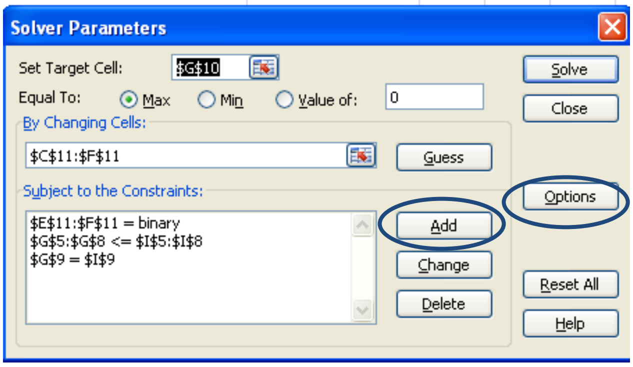
Exemplo Protótipo – WYNDOR GLASS CO. – numa folha de *Excel* é escrito, como habitualmente, o problema a resolver.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Disjunção de Restrições								
2						M=	1000		
3			Horas utilizadas na produção de um lote						
4			de portas	de janelas	y3	y4	Total		Disponibilidades
5		h-m de F1	1	0	0	0	0	≤	4
6		h-m de F2	0	2	0	0	0	≤	12
7	ou F3	h-m de F3	3	2	1000	0	0	≤	1018
8	ou F4	h-m de F4	3	8	0	1000	0	≤	1052
9	só uma restrição		0	0	1	1	0	=	1
10		Receita	3	5	0	0	0		
11		Nº de lotes	0	0	0	0			

	I
7	=18+G2
8	=52+G2

Fórmulas usuais!

Solver – Indicação da célula da função objectivo (G10), do objectivo (“Min” ou “Max”) e das células das variáveis de decisão (C11:F11). Junção (“Add”) das restrições funcionais usuais (G5:G6<=I5:I6), das restrições em disjunção (G7:G8<=I7:I8; G9=I9) e de indicação de que variáveis são binárias (E11:F11=binary).



Solução – Interpretação da solução obtida, utilizando o relatório de resposta do *Solver* ou a informação na folha de *Excel* associada à formulação do problema.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Disjunção de Restrições**								
2							M= 1000		
3			Horas utilizadas na produção de um lote						
4			de portas	de janelas	y3	y4	Total		Disponibilidades
5		h-m de F1	1	0	0	0	4	≤	4
6		h-m de F2	0	2	0	0	10	≤	12
7	ou F3	h-m de F3	3	2	1000	0	22	≤	1018
8	ou F4	h-m de F4	3	8	0	1000	1052	≤	1052
9	só uma restrição		0	0	1	1	1	=	1
10		Receita	3	5	0	0	37		
11		Nº de lotes	4	5	0	1			

R: Semanalmente, fabricar 4 lotes de portas e 5 de janelas, utilizando 4*h* em F1, *10h* em F2, as 52*h* de F4 (y_4=1) e não utilizando F3 (y_3=0), obtendo-se uma receita de 37 *u.m.*.