

- 11.** A direcção de uma fábrica, pretendendo maximizar a margem bruta (expressa em *u.m.*) obtida com a produção de dois produtos, **P1** e **P2**, formalizou o seguinte problema de PL:

$$\text{Max}Z = 20x_1 + 10x_2$$

s.a:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 18 & \text{secção 1 (h.m.)} \\ x_1 + x_2 \leq 10 & \text{secção 2 (h.m.)} \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 20 & \text{exigências de mercado} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolva o problema e escreva um pequeno relatório a apresentar à direcção da fábrica salientando os aspectos mais relevantes do plano produtivo que deverá ser seguido.

- 12.** Considere o seguinte problema de PL:

$$\text{Max}Z = 3x_1 + 2x_2 \quad (\text{lucro total, em } u.m.)$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} x_1 \leq 4 & (\text{recurso 1}) \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 & (\text{recurso 2}) \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 & (\text{recurso 3}) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Resolva o problema graficamente, utilizando o algoritmo do Simplex e o *Solver/Excel*.
- Escreva o problema dual do acima formalizado.
- Obtenha a solução óptima do dual a partir da resolução gráfica do primal, por leitura dos relatórios de output do *Solver* e resolvendo o próprio dual pelo *Solver*.
- Supondo que se tratava de um problema de análise de actividades com recursos limitados, faça a interpretação económica das soluções óptimas.
- Determine o impacto no lucro total de uma redução da capacidade do recurso 3 para 8 unidades.

- 13.** Escreva o problema dual associado ao seguinte problema de PL:

$$\text{Max}Z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Resolva graficamente o par de problemas duais.
- Resolva o problema primal utilizando um algoritmo. Escreva e classifique a solução associada a cada quadro do simplex e identifique-a no gráfico respectivo.

14. Considere o seguinte problema de PL:

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a: } &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Escreva o seu dual.
- Resolva os dois problemas.

15. Considere o seguinte problema de PL:

$$\begin{aligned} \text{Min} Z &= x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a: } &\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \geq 0 \\ -x_2 \geq -6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Resolva-o graficamente e escreva o problema dual associado a este PL.
- Resolva o problema dado usando o *Solver/Excel* e apresente as soluções óptimas de ambos os problemas.

16. Numa empresa pretende-se estudar o futuro plano de produção que engloba três produtos (**P1**, **P2** e **P3**). Com vista à maximização do lucro global foi formalizado o seguinte problema de PL:

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a: } &\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

onde x_j representa a quantidade a produzir do produto **Pj**, $j = 1, 2, 3$;

as primeiras duas restrições são relativas ao consumo de duas matérias primas **mp1** e **mp2**, respectivamente;

a terceira restrição está associada à limitação de espaço disponível para armazenagem.

Admita que o plano óptimo de produção indica que só se devem produzir 2 unidades de **P1** e 4 unidades de **P3**.

- Sem resolver o problema e sabendo que o primeiro preço-sombra é $1/3$, determine as valorizações internas dos recursos (matérias primas e espaço de armazenagem) e faça a interpretação económica desses valores.
- Obtenha os relatórios de output do *Solver/Excel* e indique qual teria que ser o acréscimo no actual lucro unitário de **P2** de modo a que se tornasse vantajosa a sua inclusão no plano produtivo.

17. Considere o seguinte problema de PL:

$$\begin{aligned} \text{Min} Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} &\begin{cases} x_1 \leq 3 \\ 3x_2 \leq 12 \\ \alpha x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Resolva graficamente o problema para $\alpha = 1$. Escreva o seu dual e resolva-o.
 - Indique, justificando, um valor de α para o qual existam soluções óptimas alternativas.
 - Indique um valor de α que torne o problema impossível.
18. Considere-se de novo o exercício 11.

- Face ao programa de produção encontrado, e uma vez que defronta problemas na venda do 1º produto, a direcção da fábrica contactou duas empresas. A empresa **A** propõe adquirir toda a produção dos dois produtos, mas quer um desconto de 30 *u.m.*; a empresa **B** aceita ficar apenas com a produção de **P1**, mas quer negociar o preço unitário deste bem. Indique como conduziria as negociações, indicando qual o contrato que firmaria.
 - Quanto estaria a direcção da fábrica disposta a pagar por uma remodelação que proporcionasse um acréscimo de 6 *h.m.* na secção 1 e uma redução de 2 *h.m.* na secção 2? Justifique, admitindo que os recursos iniciais das duas secções foram adquiridos a custo nulo.
19. Considere o seguinte problema de PL, formalizado pelo departamento de IO de uma empresa, em que se pretende otimizar a receita total mensal obtida com a venda de quatro produtos (**P1**, **P2**, **P3** e **P4**), produzidos com base em dois tipos de matéria-prima (**mp1** e **mp2**):

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a.} &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9 & \text{(mp1)} \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 24 & \text{(mp2)} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tendo em conta a resolução do problema, o departamento informa que devem ser produzidos apenas os produtos **P1** e **P3**.

- Dos dois produtos não incluídos no plano óptimo de produção, qual o que necessitaria de ter o preço de venda unitário menos aumentado, para que a sua produção se tornasse vantajosa?
- Admita que devido a dificuldades de importação, no próximo mês a empresa disporá apenas de 5 unidades de **mp1**. Determine o novo plano óptimo de produção e a receita total a ele associada.
- Suponha que a empresa pode produzir um novo produto que, ao nível unitário, consome 2 unidades de cada uma das matérias primas e se vende por 10 *u.m.*. Qual deverá ser, neste caso, o plano de produção?
- Admita que tem 24 *u.m.* para gastar, a fundo perdido, na compra de apenas uma das matérias-primas. Seja 4 *u.m.* e 8 *u.m.* o preço unitário a que pode adquirir cada unidade adicional dessas matérias-primas, respectivamente. Qual a decisão de deve ser tomada se a direcção da empresa pretender continuar a produzir apenas **P1** e **P3**? Quais as consequências para a empresa?

20. Considere o *output* do *Solver/Excel* referente ao seguinte problema, em que x_1 , x_2 e x_3 são as quantidades vendidas dos produtos 1, 2 e 3, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \quad (\text{custo total}) \\ \text{s.a: } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 90 & (\text{quantidade mínima contratada}) \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 400 & (\text{capacidade máxima}) \\ 3x_1 - 5x_2 = 0 & (\text{relação entre vendas do produto 1 e do produto 2}) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Indique a solução ótima do primal e interprete o significado de todas as suas variáveis (incluindo auxiliares).
 - Indique e interprete os respectivos preços-sombra.
 - Quais as consequências para o custo total da 3ª restrição passar a ser $3x_1 - 5x_2 = 100$?
 - Sabendo que o produto 3 passou a ter um custo unitário de 4.5, determine as consequências no plano de vendas e respectivo custo total.
21. Na fábrica Choco pretende fazer-se três novos tipos de tabletes de chocolate para a indústria alimentar. Cada tablete contém apenas açúcar e chocolate.

tablete	quantidade de açúcar (kg/tablete)	quantidade de chocolate (kg/tablete)	lucro de cada tablete de chocolate (u.m.)
Tipo 1	1	2	3
Tipo 2	1	3	7
Tipo 3	1	1	5
disponibilidades (kg)	50	100	

Para a formalização do problema definiram-se as variáveis x_j , representando o número de tabletes de **Tipo j** a confeccionar, onde $j = 1, 2, 3$.

Responda às questões que se seguem utilizando, sempre que necessário, o *Solver/Excel* na resolução dos problemas de PL.

- Para que valores do lucro das tabletes do **Tipo 2** é que a solução corrente se mantém ótima? Qual será a solução ótima se esse lucro for de 13 u.m.?
- Valerá a pena pensar em aumentar a disponibilidade de açúcar?
- Para que quantidade de açúcar é que as variáveis básicas da solução ótima são as mesmas?
- Valerá a pena pensar em aumentar a disponibilidade de chocolate?
- Para que quantidade de chocolate é que as variáveis básicas da solução ótima são as mesmas?
- Se a quantidade de açúcar disponível fosse de 60 kg, qual seria o lucro total relativo a estes produtos? Qual o plano de produção que a Choco deverá praticar nestas circunstâncias?
- Repita a alínea anterior para disponibilidades de açúcar de 40 kg e de 30 kg.

- h) Na Choco está a considerar-se a hipótese de fabricar um de dois novos tipos de tablete. Um dos tipos, **Tipo 4**, necessita de 1 kg de açúcar e 4 kg de chocolate por barra, originando um lucro unitário de 11 u.m.. Para o outro tipo de tablete, **Tipo 5**, são necessárias 2 kg de açúcar e 1 kg de chocolate por tablete, originando um lucro unitário de 13 u.m.. Tome uma decisão e fundamente-a.
- i) Que valores pode tomar o lucro unitário das tabletes de **Tipo 1**, de forma a que a solução corrente se mantenha ótima? Qual será a solução ótima se esse lucro for igual a 7 u.m.?
22. Uma organização humanitária pretende planear um programa de distribuição de medicamentos em duas regiões situadas na zona dos Grandes Lagos em África. Por questões estratégicas e de segurança, é possível utilizar três aeroportos a partir dos quais, por via terrestre, será feito o abastecimento das duas regiões. Tendo em conta que se pretende minimizar os custos de transporte dos medicamentos até aos aeroportos garantindo, em cada uma das regiões, um número mínimo de pessoas contempladas com o programa, formalizou-se o seguinte modelo de PL:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 40x_1 + 18x_2 + 30x_3 && \text{(em u.m.)} \\ \text{s.a: } &\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 250 & \text{(milhares de pessoas)} \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq 350 & \text{(milhares de pessoas)} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

onde x_j = toneladas de medicamentos a transportar para o aeroporto j ($j = 1, 2, 3$).

Obtenha a solução ótima do problema pelo *Solver/Excel*.

- a) Elabore um pequeno relatório apresentando a solução do problema, fazendo referência ao valor das variáveis de decisão do dual, bem como ao seu significado.
- b) Se o número de milhares de pessoas a contemplar na primeira região passar de 250 para 350, qual o novo custo do programa?
- c) Determine as alterações na solução se o aeroporto 1 não puder receber mais de 40 ton. de medicamentos.
23. Proceda à resolução do seguinte problema de PL, referente à produção de três produtos **P1**, **P2** e **P3** usando o *Solver/Excel*:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 \\ \text{s.a: } &\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ 4x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 90 \\ 4x_1 + 10x_2 \geq 50 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A função objectivo refere-se à maximização das receitas totais, as 1ª e 2ª restrições referem-se às horas máquina disponíveis nas secções 1 e 2, respectivamente, e a 3ª restrição fixa a margem financeira mínima a obter. Entende-se por margem financeira a diferença entre a receita total e os custos variáveis totais.

- a) Escreva e interprete as soluções óptimas dos problemas primal e dual.

- b) A receita de **P2** acaba de subir 20%, embora se mantenha a sua margem financeira. Indique quais são as alterações daqui decorrentes, seja no programa de produção seja nos preços-sombra.
- c) Quanto deve aumentar a receita de **P2** (mantendo-se a margem financeira) para que este produto faça parte do plano de produção.
- d) Indique uma forma de aumentar as receitas em pelo menos 2% através de alterações nas quantidades disponíveis dos recursos da empresa.
- e) Quais as alterações no programa óptimo decorrentes de uma nova exigência de mercado que exige uma produção mínima de **P2** de 4 unidades? Idêntica questão para **P1**.

24. Considere o seguinte problema de PL:

$$\begin{array}{l} \text{Min } Z = x_1 \\ \text{s.a: } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ 2x_1 - x_2 \leq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) Faça graficamente a análise de sensibilidade ao segundo membro da 3ª restrição funcional.
- c) Sem resolver o dual, determine o valor óptimo da variável dual associada à 3ª restrição funcional.
- d) Sem utilizar o gráfico (nem resolver o novo problema) verifique se a introdução da restrição $x_1 + x_2 \geq 3$ altera a região admissível.