

Cap. 1 – Programação Linear (PL)

Objectivos - aprender a formular problemas em programação linear e a resolvê-los recorrendo ao *Solver/Excel* e graficamente.

Definições

Modelo de PL (exemplo protótipo)

$i = 1, 2, \dots, m$ recursos ou outras imposições do modelo (fábricas)

$j = 1, 2, \dots, n$ actividades (produtos)

Parâmetros do Modelo:

c_j ($j = 1, 2, \dots, n$) coeficientes da FO (lucro unitário associado ao produto j)

b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 2º membro ou termo independente (capacidade disponível da fábrica i)

a_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m$) coeficiente técnico (capacidade gasta da fábrica i por cada unidade a fabricar do produto j)

Definindo x_j como o nível da actividade j ($j = 1, \dots, n$) (unidades a produzir do produto j), e designando por Z a medida do desempenho total (lucro) a formalização em programação linear é:

Forma Standard:

$$Z^* = \text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{função objectivo (FO)}$$

s.a:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \dots, m & \text{restrições funcionais} \\ x_j \geq 0 & j = 1, \dots, n & \text{restrições de sinal} \end{cases}$$

A **solução** de um problema de PL é um vector de \mathbb{R}^n que representa o valor das variáveis.

Uma solução que satisfaça todas as restrições (funcionais e de sinal) designa-se por **Solução Admissível** (SA). Uma **Solução** diz-se **Não Admissível** (SNA) se não verifica pelo menos uma das restrições.

O conjunto de todas as soluções admissíveis designa-se por **Região Admissível** (RA).

Solução Óptima (SO) é uma solução admissível que origina o valor mais favorável para a função objectivo (FO).

Designam-se por **soluções óptimas alternativas** as diferentes soluções óptimas de um mesmo problema, caso existam.

Valor Óptimo (Z^*) é o valor da função objectivo numa solução óptima.

Hipóteses da PL

(H1) **Proporcionalidade** (num contexto de análise de actividades): ~~x_j^2~~

A contribuição de cada actividade (j) para o valor da função objectivo Z é proporcional ao nível da actividade ($c_j x_j$).

A contribuição de cada actividade para o primeiro membro de cada restrição funcional é proporcional ao nível da actividade ($a_{ij} x_j$).

(H2) **Aditividade** (num contexto de análise de actividades): ~~x_j, x_k~~

Num modelo de PL cada função é a soma das contribuições individuais das respectivas actividades.

(H3) **Divisibilidade**: $\forall j, x_j \in \mathbb{R}$.

(H4) **Certeza**: Num modelo de PL todos os parâmetros são constantes conhecidas.

Propriedades da PL

Propriedade 1: A região admissível de um problema de PL ou é um conjunto vazio ou é um conjunto convexo.

Propriedade 2: Se a região admissível de um problema de PL é não vazia e limitada, então existe solução óptima.

Propriedade 3: Se um problema de PL tem óptimo, então pelo menos um dos pontos extremos da região admissível é solução óptima.

Propriedade 4: Dado um problema de PL com óptimo, se um ponto extremo da região admissível não tem pontos extremos adjacentes com melhor valor para a função objectivo, então esse ponto extremo é solução óptima.

Resolução Gráfica de Problemas de PL

Exige-se a resolução gráfica de problemas com apenas duas variáveis de decisão.

- 1º) Representar a região admissível (RA)
 - a. identificar o semi-plano correspondente a cada uma das restrições de sinal impostas;
 - b. representar o semi-plano correspondente a cada uma das restrições funcionais (desenhar a recta associada e identificar o semi-plano associado à respectiva inequação / equação);
 - c. definir a RA como sendo o resultado da intersecção de todos os semi-planos identificados. Se $RA = \emptyset$ o problema é impossível, caso contrário prosseguir.
- 2º) Identificar, caso exista, o(s) ponto(s) óptimo(s):
 - a. representar uma recta de nível da FO (atribuindo um valor arbitrário a Z) e identificar o sentido de optimização
 - b. identificar o(s) ponto(s) da RA a que corresponde o melhor valor de Z (ou seja, identificar a SO), ou concluir que o problema tem valor óptimo ilimitado (não tem solução óptima).

Um PL está na *forma aumentada* se todas as variáveis são não negativas e todas as restrições funcionais estão expressas por equações, introduzindo, se necessário, variáveis não negativas, designadas por *variáveis auxiliares* (*variáveis desvio* ou *variáveis de folga*).

Uma *solução aumentada* é uma solução do problema aumentado.

Propriedade 5: Qualquer problema de PL pode ser escrito como um problema de PL equivalente na forma aumentada de maximização.

Passagem de Modelos de PL à Forma Aumentada de Maximização

$$(i) \quad \text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \longrightarrow \quad \text{Max}(-Z) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j \quad (\text{Min } Z = -\text{Máx}(-Z))$$

$$(ii) \quad \text{Restrição de tipo '≤': } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad \wedge \quad x_{n+i} \geq 0$$

$$(iii) \quad \text{Restrição de tipo '≥': } \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \geq b_k \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - x_{n+k} = b_k \quad \wedge \quad x_{n+k} \geq 0$$

$$(iv) \quad \text{Variável não positiva: } x_j \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'_j = -x_j \geq 0$$

$$(v) \quad \text{Variável livre: } x_j \text{ livre} \Rightarrow x_j = x'_j - x''_j, \text{ com } \begin{cases} x'_j = \text{Máx}\{0; x_j\} \geq 0 \\ x''_j = \text{Máx}\{0; -x_j\} \geq 0 \end{cases}$$

Soluções Básicas Admissíveis

Dado o problema aumentado com m equações e ℓ ($> m$) variáveis, se se atribuir o valor zero a $\ell - m$ variáveis - **Variáveis Não Básicas** (VNB) - e se for possível resolver, de forma única, o sistema de equações lineares em relação às restantes m variáveis - **Variáveis Básicas** (VB) - obtém-se uma **Solução Básica** (SB).

Uma **Solução Básica** diz-se **Admissível** (SBA) se todas as variáveis respeitarem as restrições de sinal. Caso pelo menos uma variável não respeite as restrições de sinal a solução denomina-se **Solução Básica Não Admissível** (SBNA).

A cada solução básica admissível corresponde um só ponto extremo da região admissível (RA), também designado por **solução de canto admissível**. Cada ponto extremo da RA tem associada pelo menos uma SBA.

Duas **soluções básicas** dizem-se **adjacentes** se os respectivos conjuntos de variáveis básicas apenas diferem por uma variável (e, conseqüentemente, os respectivos conjuntos de variáveis não básicas apenas diferem por uma variável). Graficamente, em \mathbb{R}^2 , duas soluções de canto admissíveis são adjacentes se pertencerem ao mesmo segmento de recta na fronteira da RA.

Dualidade e Análise de Sensibilidade

Objectivos - aprender a interpretar economicamente as soluções dos problemas, incluindo preços-sombra, e a efectuar estudos de sensibilidade a alguns parâmetros.

Correspondência entre um par de problemas duais (primal/dual)

PRIMAL (DUAL) ←	→ DUAL (PRIMAL)
Maximizar <i>Max Z (Max W)</i>	Minimizar <i>Min W (Min Z)</i>
1 restrição	1 variável de decisão
<i>i</i> -ésima restrição de tipo " \leq "	$y_i \geq 0$ ($x_i \geq 0$)
<i>i</i> -ésima restrição de tipo " \geq "	$y_i \leq 0$ ($x_i \leq 0$)
<i>i</i> -ésima restrição de tipo " $=$ "	y_i livre (x_i livre)
Termos independentes b_i $i=1, \dots, m$ (c_j $j=1, \dots, n$)	Coefficientes da função objectivo $W = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$ ($Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$)
Coefficientes da função objectivo $Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ ($W = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$)	Termos independentes c_j $j=1, \dots, n$ (b_i $i=1, \dots, m$)
1 variável de decisão	1 restrição
$x_j \geq 0$ ($y_j \geq 0$)	<i>j</i> -ésima restrição de tipo " \geq "
$x_j \leq 0$ ($y_j \leq 0$)	<i>j</i> -ésima restrição de tipo " \leq "
x_j livre (y_j livre)	<i>j</i> -ésima restrição de tipo " $=$ "
Matriz de coeficientes técnicos A (A^T)	Matriz de coeficientes técnicos A^T (A)

O *i*-ésimo preço-sombra (y_i) representa a proporção de variação no valor óptimo em função do acréscimo no *i*-ésimo segundo membro.

Relação entre as variáveis de um par de problemas duais

nº	Primal	Dual
<i>n</i>	Variável de decisão	Restrição (variável desvio)
<i>m</i>	Restrição (variável desvio)	Variável de decisão

Propriedades da Dualidade

Propriedade 4: O dual do dual é o primal.

Propriedade 5: Teorema Fraco (dado um problema primal de maximização)

Se $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ é SA primal e $\mathbf{y}' = (y'_1, \dots, y'_m)$ é SA do dual
então, $Z' = c_1x'_1 + c_2x'_2 + \dots + c_nx'_n \leq b_1y'_1 + b_2y'_2 + \dots + b_my'_m = W'$.

Propriedade 6: Se $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ é SA do primal, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ é SA do dual e

$Z^* = c_1x_1^* + c_2x_2^* + \dots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + b_2y_2^* + \dots + b_my_m^* = W^*$
então, \mathbf{x}^* e \mathbf{y}^* são soluções óptimas dos respectivos problemas.

Propriedade 7: Dado um par de problemas duais, se um tem função objectivo ilimitada o outro é impossível.

Propriedade 8: Teorema Forte

Dado um par de problemas duais, se um tem solução óptima então o outro também tem e os valores óptimos dos dois problemas são iguais, ou seja, $Z^* = W^*$.

Propriedade 9: Os preços-sombra são os valores das variáveis de decisão na solução óptima do dual.

Tabela: Soluções Primal/Dual

DUAL \ PRIMAL	Tem SA	Não tem SA
Tem SA	Os dois problemas têm SO e $Z^* = W^*$	Primal impossível Dual ilimitado
Não tem SA	Primal ilimitado Dual impossível	Primal impossível Dual impossível

Relações de desvios complementares entre soluções básicas complementares

Nº de variáveis	Variável Primal	Variável Dual
m	Básica	Não Básica
$\ell - m$	Não Básica	Básica