Cap. 1 – Exemplos

1. Considere o seguinte problema de PL em que se pretendeu determinar as unidades a produzir de dois artigos (**P1** e **P2**), maximizando o lucro mensal total (em *u.m.*).

$$Max\ Z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{s. a:} \begin{cases} x_1 + \ x_2 \leq 10 & \text{capacidade da secção de fabrico (em } h.m.) \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 32 & \text{capacidade da secção de embalagem (em } h.m.) \\ x_1 - \ x_2 \geq \ 2 & \text{imposição de mercado} \\ x_1,\ x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

a) Mostre que esta formulação verifica as hipóteses da PL.

b) Com base na <u>resolução gráfica</u> do problema interprete economicamente a solução óptima primal (variáveis principais e desvio)

c) Escreva o problema <u>dual</u> do problema dado e escreva as relações de complementaridade para o par de problemas duais.

d) Resolva o problema dado pelo *Excel*/*Solver*

d.1) Escreva e interprete economicamente a solução óptima do problema dual.

d.2) Justifique por que valor seria vantajoso o contrato da $h.m.$ extra na secção de fabrico, e quantas h.m. contrataria, no máximo.

d.3) Indique, justificando, um valor para o lucro unitário do segundo produto (**P2**) que provocaria alterações no actual plano óptimo.

2. Um indivíduo, entre muitos, investiu fortemente em fundos com base em produtos imobiliários e conseguiu, finalmente, resgatar $25\ mil\ u.m.$ que pretende investir durante um certo período de tempo. Depois da experiência passada, o seu objectivo consiste em minimizar o risco, contudo gostaria de atingir uma remuneração mínima de $2\ mil\ u.m.$ no final do período. As características dos produtos financeiros que pondera para constituir a sua carteira levaram-no a formular o problema de PL seguinte, onde x_i representa o montante (em $10^3 u.m.$) a investir no produto $i = 1, 2$:

$$Min\ Z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. a:} \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \leq 25 & \text{restrição orçamental} \\ 0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 \geq 2 & \text{restrição de remuneração} \\ x_1,\ x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

a) Resolva graficamente o problema dado. Apresente e interprete o valor óptimo das variáveis de decisão e de desvio (ou auxiliares).

b) Escreva o dual e determine a sua solução óptima (apenas as variáveis de decisão). Note que pode tirar partido da solução e resolução da alínea anterior.

c) Resolva pelo *Solver*/*Excel* e interprete as soluções do par de problemas duais.

d) Determine e interprete os intervalos de sensibilidade de cada um dos termos independentes.

e) Determine e interprete os intervalos de sensibilidade de cada um dos coeficientes da função objectivo.

3. Um gestor de conta criticou a abordagem do problema exposta na questão anterior (ex. **2**), argumentando que deste modo o rendimento obtido nunca seria superior ao mínimo exigido. Segundo ele, a função objectivo deve traduzir a maximização do rendimento e o risco pode ser controlado através de restrições impostas sobre a composição da carteira. Além disso, sugeriu mais 2 produtos financeiros a considerar. Usando os conhecimentos de IO formulou o problema seguinte, que resolveu pelo *Solver/Excel*.

	X1	X2	X3	X4	Total		2ºs membros (mil *u.m.*)
Orçamento	1	1	1	1	25	<=	25
Risco 1	1	1	0	0	10	<=	15
Risco 2	0	0	1	1	15	<=	15
Risco 3	1	0	1	0	15	>=	15
Rendimento	0,50	0,80	0,75	0,90	19,25		
Solução	0	10	15	0			

Obtenha output do *Solver* e ajude a esclarecer as seguintes dúvidas.

a) Qual o montante a investir em cada produto e qual o rendimento total associado?

b) Determine e interprete os intervalos de sensibilidades de cada um dos termos independentes.

c) Determine e interprete os intervalos de sensibilidade de cada um dos coeficientes da função objectivo.

d) De quanto varia o rendimento total se alterar o montante de segurança do Risco 2 das actuais 15 $mil\ u.m.$ para 14 $mil\ u.m.$?

e) Poderá quantificar a alteração no rendimento total, se exigir que o total dos investimentos 3 e 4 (2º membro da restrição Risco 2) não ultrapasse as 9 $mil\ u.m.$?

f) Quanto se altera o rendimento total se aumentar o rendimento do produto 1 para 0,6? Identifique a solução óptima nesta situação.

4. Utilizando o *Solver*/*Excel* resolva o problema de PL formulado para determinar o montante a cobrar por cada bilhete num parque de estacionamento de um estabelecimento numa congestionada zona de Lisboa. Pretendem-se emitir três tipos de bilhetes, relacionados com três tipos de utilizadores do parque: funcionários do estabelecimento (tipo 1); clientes (tipo 2); e outros utilizadores (tipo 3). Representou-se por x_j o preço (em $u.m.$) a cobrar por bilhete de tipo j ($j = 1,2,3$). A maximização da receita total por unidade de tempo, calculada em função do número esperado de bilhetes que serão vendidos por unidade de tempo, e sujeito a quatro restrições funcionais, deu origem ao seguinte PL:

$$Max\ Z = 20x_1 + 40x_2 + 10x_3 \qquad \text{receita total (em } u.m.\text{)}$$

$$\text{s. a:} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 260 & \text{capacidade do parque} \\ x_1 \leq 20 & \text{preço máximo de um bilhete de tipo 1 (em } u.m.\text{)} \\ 10x_1 + 10x_2 + x_3 \geq 900 & \text{receita mínima exigida (em } u.m.\text{)} \\ 4x_1 - x_2 = 0 & \text{relação entre o preço de bilhetes (em } u.m.\text{)} \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

a) Escreva e interprete as soluções óptimas do primal e do dual.

b) Escreva o dual do problema dado.

c) Indique e interprete o intervalo em que permanece válido o primeiro preço-sombra.

d) Quais as consequências na receita total de alterar para 5 u.m. a actual relação entre os preços de venda dos bilhetes de tipo 1 e 2.

e) Quais as consequências, quer na actual solução óptima quer no correspondente valor óptimo, de um acréscimo de 10 no número esperado de bilhetes que serão vendidos por unidade de tempo a funcionários.

f) Para aumentar a receita, a direcção do parque pretende optar entre: (A) a realização de obras para aumentar a capacidade do parque para 280, e que custarão 150 *u.m.*; (B) aumentar de 20 para 21 *u.m.* o preço máximo a cobrar aos funcionários do estabelecimento. Justifique qual das opções será mais favorável para a direcção do parque.

5. Um empresário reparte o tempo de trabalho entre as suas duas empresas, A e B. O gerente da empresa A, ex-colega do curso de gestão do ISEG, ao planear o dia seguinte, verificou que necessitava da presença do empresário pelo menos 5 horas. De acordo com a agenda e preferências do empresário, resolveu formular o problema de PL seguinte, onde x_i representa o tempo (em horas) que o empresário deverá trabalhar na empresa i=A,B.

$$Max\ Z = 5x_A + 4x_B$$

$$\text{s. a:} \begin{cases} x_A + x_B \leq 15 \\ x_A \geq 5 \\ x_B \geq 3 \\ 2x_A - x_B \leq 0 \\ \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

A função objectivo traduz a utilidade atribuída às horas de trabalho do empresário. Resolva o problema pelo *Solver/Excel* e responda às seguintes questões.

a) Escreva e interprete a solução do problema primal e a do problema dual.

b) Da agenda do empresário para o dia seguinte consta um almoço de negócios com duração de uma hora. Admitindo que atribui uma utilidade de 6 à sua presença nesse encontro, aconselharia a desmarcação do almoço de modo a ficar com 16 horas para trabalhar nas empresas A e B, em vez das actuais 15?

c) Considere que as horas de trabalho na empresa B não têm qualquer utilidade e identifique o tempo que deve então ser atribuído a cada uma das empresas, bem como a utilidade total resultante da solução.

O empresário insiste em trabalhar não mais do que 10 horas no dia seguinte, e assume que o trabalho previsto para a empresa A pode ser resolvido com apenas 4 horas. Lembrando-se também da disciplina de IO resolveu, numa primeira abordagem, reformular o problema do seguinte modo

$$Max\ Z = 5x_A + 4x_B$$

$$\text{s. a:} \begin{cases} x_A + x_B \leq 10 \\ x_A \geq 4 \\ x_B \geq 3 \\ 2x_A - x_B \leq 0 \\ \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

d) Resolva graficamente o problema dado e comente o resultado obtido.

e) Escreva o dual e verifique que $y_1 = 5, y_2 = y_3 = y_4 = 0$ é uma sua solução admissível.

f) Com base nos resultados das alíneas anteriores conclua sobre a solução óptima do dual.