



Cap. 4 Análise de Decisão

Sistemas de Apoio à Decisão
2010/2011



Análise de Decisão

- Análise de Decisão
 - Modelação
 - Critérios de Decisão
 - Não Probabilísticos
 - Probabilísticos
- Decisão Sem Incorporação de Experiência
- Decisão Com Incorporação de Experiência
- Árvores de Decisão
- Resolução com o *Tree Plan/Excel*

Análise de Decisão - Modelação

1) Acções - $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

- Identificar e enumerar TODAS as Acções de forma
 - EXAUSTIVA – não ignorar acções
 - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou possibilidade de escolha múltipla
- **Objectivo** – escolher uma e uma só acção de A

2) Estados da Natureza - $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$

- Identificar e enumerar TODOS os Estados da Natureza de forma
 - EXAUSTIVA – não ignorar estados da natureza
 - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou ambiguidades
- Ocorre um e um só estado!
- O decisor só conhece o estado depois de escolhida a acção

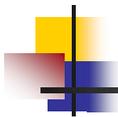
Análise de Decisão - Exemplo

Exemplo Protótipo (livro, pg. 673)

The GOFERBROKE COMPANY owns a tract of land that may contain oil. A consulting geologist has reported to management that she believes there is 1 chance in 4 of oil.

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

However, before deciding whether to drill or sell, another option is to conduct a detailed seismic survey of the land to obtain a better estimate of the probability of finding oil. Section 15.3 discusses this case of *decision making with experimentation*, at which point the necessary additional data will be provided.




Instituto Superior de Economia e Gestão
Universidade Nova de Lisboa

Análise de Decisão - Modelação

3) Função Ganho (Proveito)

- Avaliar as acções em função das consequências que arrastam e das preferências do decisor por tais consequências

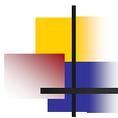
$p(a_i, \theta_k)$ ganho de tomar a acção $a_i \in A$ e o estado da natureza ser $\theta_k \in \Theta$ ($i=1, \dots, m; k=1, \dots, n$)

- Eliminar do estudo eventuais acções dominadas !

4) Critérios de Decisão

- Não Probabilísticos: **MAXIMIN**
- Probabilísticos: **Bayes**; Máxima Verosimilhança

SAD 2010/11 5




Instituto Superior de Economia e Gestão
Universidade Nova de Lisboa

Análise de Decisão

Problemas a responder

- Que acção escolher ?
- Qual o ganho esperado da acção escolhida ?
- Valerá a pena efectuar uma experiência (sondagem; estudo de mercado; ...) para diminuir a incerteza ? Ou seja, será que o aumento no ganho esperado resultante da realização de uma experiência compensa o custo da mesma ?
- Qual o preço que estamos dispostos a pagar para a eliminação da incerteza ?

SAD 2010/11 6



Decisão Sem Experiência

Critério de Decisão Não Probabilístico

Princípio de Decisão **MAXIMIN** (de Wald)

- Critério pessimista que considera que a natureza “é do contra”!
O estado de natureza será o pior possível para a acção que o decisor escolher.
- Para cada acção e, tendo em conta que a natureza é adversa, identifica-se o ganho mínimo a que o decisor estará sujeito se a escolher. A acção **maximin** é então a que maximiza o ganho mínimo, ou seja, a acção correspondente a:

$$\underset{1 \leq i \leq m}{\text{Máx}} \left\{ \underset{1 \leq k \leq n}{\text{Min}} \{ p(a_i, \theta_k) \} \right\}$$

SAD 2010/11 7



Decisão Sem Experiência

Princípio de Decisão **MAXIMIN**

- Vantagens
 - Protege o decisor contra o “pior caso”
 - Garante um ganho mínimo
 - Não permite perdas disparatadas
- Adapta-se a situações de
 - Forte aversão ao risco
 - Concorrência agressiva
- Determinar a acção maximin para o exemplo protótipo

SAD 2010/11 8

Decisão Sem Experiência - Exemplo

Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente acção Maximin e comente o resultado.

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	100	80	-100
a_2	-80	-80	-80

R:

Decisão Sem Experiência

Crítério de Decisão Probabilístico

Princípio de Decisão Bayes

- A informação que o decisor tem sobre os estados da natureza pode ser traduzida por uma distribuição de probabilidade – distribuição *a priori* – sendo o estado da natureza uma v.a.
- $h_\theta(k) = P[\theta = \theta_k]$: probabilidade *a priori* associada ao estado θ_k .
- Princípio de Bayes - escolher a acção que maximiza o ganho esperado (**risco de Bayes**), ou seja, a acção correspondente a:

$$\text{Máx}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{k=1}^n h_\theta(k) p(a_i, \theta_k) \right\} = \text{Máx}_{1 \leq i \leq m} \left\{ E[p(a_i, \theta)] \right\}$$

Decisão Sem Experiência

- Determinar a acção Bayes para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_\theta(k)$			

$$E[p(a_1, \theta)] =$$

$$E[p(a_2, \theta)] =$$

Decisão Com Experiência

- Valerá a pena recorrer a experimentação para diminuir a incerteza?
- O **valor esperado da informação perfeita (EVPI)** representa o valor que o decisor está disposto a pagar para retirar a incerteza do problema, ou seja, para ter a certeza absoluta sobre qual dos estados da natureza se irá observar.
- Seja a_h a acção Bayes (sem experiência), com ganho esperado $E[p(a_h, \theta)]$ e EP o ganho esperado com informação perfeita, então:

$$EVPI = EP - E[p(a_h, \theta)]$$

onde $EP = \sum_{k=1}^n h_\theta(k) p(\tilde{a}^k, \theta_k)$, e \tilde{a}^k representa a acção a escolher quando o estado da natureza é θ_k (acção com o ganho máximo associado para este estado da natureza).

Valor Esperado da Informação Perfeita

- Valor esperado da Informação Perfeita - EVPI

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_\theta(k)$	1/4	3/4	1

- Se $\theta = \theta_1$ escolho com ganho $\Rightarrow EP =$
- Se $\theta = \theta_2$ escolho com ganho

$EVPI =$

Decisão Com Experiência

- Se for realizada uma experiência para diminuir a incerteza, a acção a escolher deve ficar dependente do resultado obtido, necessitando o decisor de uma função de decisão que o ajude a escolher em função dos resultados da experiência. Questões a responder:
 - Deve ou não ser feita a experiência ?
 - Se optar por fazer a experiência que acção escolher, em função do resultado da experiência ?
- Optando pela **função de decisão Bayes**, a acção é escolhida aplicando o princípio de Bayes ao ganho esperado, calculado com as probabilidades revistas (*a posteriori*) de cada um dos possíveis resultados da experiência.



Decisão Com Experiência

Seja:

- S a v.a. que representa a informação adicional da experiência
- $h_0(k)$ as probabilidades *a priori*
- $Q_{S/\theta=\theta_k}(s) = P[S = s/\theta = \theta_k]$ a **função de verosimilhança** da experiência, ou seja, a credibilidade da experiência em face de resultados passados
- $P_{\theta S}(\theta_k, s) = P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]$ é a f.d. conjunta do par aleatório (θ, S)
- $P[S = s] = \sum_{k=1}^n P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]$ é a f.d. marginal da v.a. S

SAD 2010/11 16



Decisão Com Experiência

Método:

- 1) Calcular as probabilidades *a posteriori*

$$P[\theta = \theta_k / S = s] = \frac{P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]}{\sum_{k=1}^n P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]}$$

Excel

 - As probabilidades *a posteriori* representam a probabilidade de cada estado, condicionada ao resultado da experiência.
- 2) Para cada resultado possível da experiência, e tendo em conta as probabilidades *a posteriori*, determinar a acção Bayes
- 3) Calcular o ganho esperado da experiência, tendo em conta a f.d. marginal de S e as acções Bayes para cada resultado possível.
 - Árvores de Decisão

SAD 2010/11 17



Decisão Com Experiência - Exemplo

Exemplo Protótipo (continuação – pág. 680)

Considere-se que é possível a elaboração de testes sísmicos ao terreno, para avaliar a possível existência de petróleo no subsolo, a um custo de 30 000 u.m..

Deste teste pode obter-se um de dois resultados: FSS (é provável a existência de petróleo) ou USS (não é provável a existência de petróleo).

Da observação passada em áreas semelhantes sabe-se que: o teste acertou, sempre que existia petróleo, em 60% dos casos; e acertou na não existência de petróleo em 80% dos casos

- Valerá a pena efectuar um teste sísmico?
- Qual a acção que deve ser escolhida para cada um dos resultados do teste?
- Qual o valor esperado do ganho associado à realização do teste?

SAD 2010/11 18



Decisão Com Experiência - Exemplo

- Determinar a acção Bayes tendo em conta o resultado obtido:
 - Calcular as probabilidades *a posteriori* tendo em conta o resultado da experiência;
 - Identificar a acção Bayes considerando as novas probabilidades (*a posteriori*) dos estados da natureza

$p(a_i \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
Prob <i>a posteriori</i>			1

SAD 2010/11 19


Instituto Superior de Economia e Gestão

Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Se o teste deu como resultado $S='FSS'$

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$P[\theta=\theta_k S='FSS']$			1

Excel
(*prob. a posteriori*)

$E[p(a_1, \theta)] =$

$E[p(a_2, \theta)] =$

SAD 2010/11 20


Instituto Superior de Economia e Gestão

Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Se o teste deu como resultado $S='USS'$

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$P[\theta=\theta_k S='USS']$			1

Excel
(*prob. a posteriori*)

$E[p(a_1, \theta)] =$

$E[p(a_2, \theta)] =$

SAD 2010/11 22

Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Ganho Esperado da Experiência

S	FSS	USS
Acção Bayes	a_1	a_2
Ganho Esperado	300	90

Excel
(f.d. marginal de S)

$EVE =$

SAD 2010/11 24

Árvores de Decisão

Usam-se quando:

- 1) Existem acções sequenciais no tempo (Experiências,...)
- 2) Estados de natureza com probabilidades associadas distintas

Árvore de Decisão - 2 tipos de nodos:

- Nodos de Decisão** – escolha do caminho a seguir pertence ao decisor
- Nodos Causais** (ou Aleatórios) – a determinação do caminho é em função de acontecimentos que o decisor não controla

Excel / TreePlan

SAD 2010/11 26