



## Cap. 4 Análise de Decisão

---

Sistemas de Apoio à Decisão  
2010/2011



## Análise de Decisão

---

- Análise de Decisão
  - Modelação
  - Critérios de Decisão
    - Não Probabilísticos
    - Probabilísticos
- Decisão Sem Incorporação de Experiência
- Decisão Com Incorporação de Experiência
- Árvores de Decisão
- Resolução com o *Tree Plan/Excel*

## Análise de Decisão - Modelação

- 1) Acções -  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 
  - Identificar e enumerar TODAS as Acções de forma
    - EXAUSTIVA – não ignorar acções
    - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou possibilidade de escolha múltipla
  - **Objectivo** – escolher uma e uma só acção de  $A$
- 2) Estados da Natureza -  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ 
  - Identificar e enumerar TODOS os Estados da Natureza de forma
    - EXAUSTIVA – não ignorar estados da natureza
    - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou ambiguidades
  - Ocorre um e um só estado!
  - O decisor só conhece o estado depois de escolhida a acção


## Análise de Decisão - Exemplo

### Exemplo Protótipo (livro, pg. 673)

The GOFERBROKE COMPANY owns a tract of land that may contain oil. A consulting geologist has reported to management that she believes there is 1 chance in 4 of oil.

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

However, before deciding whether to drill or sell, another option is to conduct a detailed seismic survey of the land to obtain a better estimate of the probability of finding oil. Section 15.3 discusses this case of *decision making with experimentation*, at which point the necessary additional data will be provided.



## Análise de Decisão - Modelação

3) Função Ganho (Proveito)

- Avaliar as acções em função das consequências que arrastam e das preferências do decisor por tais consequências


$$p(a_i, \theta_k) \text{ ganho de tomar a acção } a_i \in A \text{ e o estado da natureza ser } \theta_k \in \Theta \quad (i=1, \dots, m; k=1, \dots, n)$$

- Eliminar do estudo eventuais acções dominadas !

4) Critérios de Decisão

- Não Probabilísticos: **MAXIMIN**
- Probabilísticos: **Bayes**; Máxima Verosimilhança

SAD 2010/11 5




## Análise de Decisão

### Problemas a responder

- Que acção escolher ?
- Qual o ganho esperado da acção escolhida ?
- Valerá a pena efectuar uma experiência (sondagem; estudo de mercado; ...) para diminuir a incerteza ? Ou seja, será que o aumento no ganho esperado resultante da realização de uma experiência compensa o custo da mesma ?
- Qual o preço que estamos dispostos a pagar para a eliminação da incerteza ?

SAD 2010/11 6




# Decisão Sem Experiência

## Critério de Decisão Não Probabilístico

### Princípio de Decisão **MAXIMIN** (de Wald)

- Critério pessimista que considera que a natureza “é do contra”!  
O estado de natureza será o pior possível para a acção que o decisor escolher.
- Para cada acção e, tendo em conta que a natureza é adversa, identifica-se o ganho mínimo a que o decisor estará sujeito se a escolher. A acção **maximin** é então a que maximiza o ganho mínimo, ou seja, a acção correspondente a:
 
$$\underset{1 \leq i \leq m}{\text{Máx}} \left\{ \underset{1 \leq k \leq n}{\text{Min}} \{ p(a_i, \theta_k) \} \right\}$$

SAD 2010/11 7



# Decisão Sem Experiência

## Princípio de Decisão **MAXIMIN**

- Vantagens
  - Protege o decisor contra o “pior caso”
  - Garante um ganho mínimo
  - Não permite perdas disparatadas
- Adapta-se a situações de
  - Forte aversão ao risco
  - Concorrência agressiva
- Determinar a acção maximin para o exemplo protótipo

SAD 2010/11 8

## Decisão Sem Experiência - Exemplo

Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente acção Maximin e comente o resultado.

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
$a_1$	100	80	-100
$a_2$	-80	-80	-80

R:

## Decisão Sem Experiência

### Crítério de Decisão Probabilístico

#### Princípio de Decisão Bayes

- A informação que o decisor tem sobre os estados da natureza pode ser traduzida por uma distribuição de probabilidade – distribuição *a priori* – sendo o estado da natureza uma v.a.
- $h_\theta(k) = P[\theta = \theta_k]$  : probabilidade *a priori* associada ao estado  $\theta_k$ .
- Princípio de Bayes - escolher a acção que maximiza o ganho esperado (**risco de Bayes**), ou seja, a acção correspondente a:

$$\text{Máx}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{k=1}^n h_\theta(k) p(a_i, \theta_k) \right\} = \text{Máx}_{1 \leq i \leq m} \left\{ E[p(a_i, \theta)] \right\}$$

## Decisão Sem Experiência

- Determinar a acção Bayes para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$h_\theta(k)$			

$$E[p(a_1, \theta)] =$$

$$E[p(a_2, \theta)] =$$

## Decisão Com Experiência

- Valerá a pena recorrer a experimentação para diminuir a incerteza?
- O **valor esperado da informação perfeita (EVPI)** representa o valor que o decisor está disposto a pagar para retirar a incerteza do problema, ou seja, para ter a certeza absoluta sobre qual dos estados da natureza se irá observar.
- Seja  $a_h$  a acção Bayes (sem experiência), com ganho esperado  $E[p(a_h, \theta)]$  e  $EP$  o ganho esperado com informação perfeita, então:

$$EVPI = EP - E[p(a_h, \theta)]$$

onde  $EP = \sum_{k=1}^n h_\theta(k) p(\tilde{a}^k, \theta_k)$ , e  $\tilde{a}^k$  representa a acção a escolher quando o estado da natureza é  $\theta_k$  (acção com o ganho máximo associado para este estado da natureza).

## Valor Esperado da Informação Perfeita

- Valor esperado da Informação Perfeita - EVPI


$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$h_\theta(k)$	1/4	3/4	1

- Se  $\theta = \theta_1$  escolho  com ganho   $\Rightarrow EP =$
- Se  $\theta = \theta_2$  escolho  com ganho

$EVPI =$

## Decisão Com Experiência

- Se for realizada uma experiência para diminuir a incerteza, a acção a escolher deve ficar dependente do resultado obtido, necessitando o decisor de uma função de decisão que o ajude a escolher em função dos resultados da experiência. Questões a responder:
  - Deve ou não ser feita a experiência ?
  - Se optar por fazer a experiência que acção escolher, em função do resultado da experiência ?
- Optando pela **função de decisão Bayes**, a acção é escolhida aplicando o princípio de Bayes ao ganho esperado, calculado com as probabilidades revistas (*a posteriori*) de cada um dos possíveis resultados da experiência.




## Decisão Com Experiência

Seja:

- $S$  a v.a. que representa a informação adicional da experiência
- $h_0(k)$  as probabilidades *a priori*
- $Q_{S/\theta=\theta_k}(s) = P[S = s/\theta = \theta_k]$  a **função de verosimilhança** da experiência, ou seja, a credibilidade da experiência em face de resultados passados
- $P_{\theta S}(\theta_k, s) = P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]$  é a f.d. conjunta do par aleatório  $(\theta, S)$
- $P[S = s] = \sum_{k=1}^n P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]$  é a f.d. marginal da v.a.  $S$

SAD 2010/11 16



## Decisão Com Experiência

Método:

- 1) Calcular as probabilidades *a posteriori*

$$P[\theta = \theta_k / S = s] = \frac{P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]}{\sum_{k=1}^n P[S = s/\theta = \theta_k]P[\theta = \theta_k]}$$

Excel

  - As probabilidades *a posteriori* representam a probabilidade de cada estado, condicionada ao resultado da experiência.
- 2) Para cada resultado possível da experiência, e tendo em conta as probabilidades *a posteriori*, determinar a acção Bayes
- 3) Calcular o ganho esperado da experiência, tendo em conta a f.d. marginal de  $S$  e as acções Bayes para cada resultado possível.
  - Árvores de Decisão

SAD 2010/11 17



## Decisão Com Experiência - Exemplo

### Exemplo Protótipo (continuação – pág. 680)

Considere-se que é possível a elaboração de testes sísmicos ao terreno, para avaliar a possível existência de petróleo no subsolo, a um custo de 30 000 u.m..

Deste teste pode obter-se um de dois resultados: FSS (é provável a existência de petróleo) ou USS (não é provável a existência de petróleo).


Da observação passada em áreas semelhantes sabe-se que: o teste acertou, sempre que existia petróleo, em 60% dos casos; e acertou na não existência de petróleo em 80% dos casos

- Valerá a pena efectuar um teste sísmico?
- Qual a acção que deve ser escolhida para cada um dos resultados do teste?
- Qual o valor esperado do ganho associado à realização do teste?

## Decisão Com Experiência - Exemplo

- Determinar a acção Bayes tendo em conta o resultado obtido:
  - Calcular as probabilidades *a posteriori* tendo em conta o resultado da experiência;
  - Identificar a acção Bayes considerando as novas probabilidades (*a posteriori*) dos estados da natureza

$p(a_i   \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
Prob <i>a posteriori</i>			1

  
Instituto Superior de Economia e Gestão

## Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Se o teste deu como resultado  $S='FSS'$


$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$P[\theta=\theta_k S='FSS']$			1

Excel  
(prob. a posteriori)

$E[p(a_1, \theta)] =$

$E[p(a_2, \theta)] =$

SAD 2010/11 20

  
Instituto Superior de Economia e Gestão

## Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Se o teste deu como resultado  $S='USS'$

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$P[\theta=\theta_k S='USS']$			1

Excel  
(prob. a posteriori)

$E[p(a_1, \theta)] =$

$E[p(a_2, \theta)] =$

SAD 2010/11 22

## Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Ganho Esperado da Experiência

$S$	FSS	USS
Acção Bayes	$a_1$	$a_2$
Ganho Esperado	300	90

Excel  
(f.d. marginal de  $S$ )

$EVE =$

SAD 2010/11 24

## Árvores de Decisão

Usam-se quando:

- 1) Existem acções sequenciais no tempo (Experiências,...)
- 2) Estados de natureza com probabilidades associadas distintas

**Árvore de Decisão** - 2 tipos de nodos:

- Nodos de Decisão** – escolha do caminho a seguir pertence ao decisor
- Nodos Causais** (ou Aleatórios) – a determinação do caminho é em função de acontecimentos que o decisor não controla

Excel / TreePlan

SAD 2010/11 26