Capítulo 5

Equações Diferenciais Ordinárias

(Versão preliminar 0.2)
versão disponível em Maio 2010

5.1 Definições e exemplos

De um modo informal diremos que uma equação diferencial é uma igualdade que envolve uma função (incógnita) e algumas das suas derivadas, bem como variáveis independentes. Resolver uma equação diferencial é determinar todas as funções que verificam a referida igualdade. Se se tratar de uma função incógnita de uma só variável estaremos na presença de uma **equação diferencial ordinária**. No caso de a função ter várias variáveis e da equação envolver derivadas parciais, então trata-se de uma **equação diferencial parcial** ou com derivadas parciais. À maior das ordens das derivadas da função incógnita que aparecem na equação chama-se **ordem da equação diferencial**. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1 *Equações diferenciais ordinárias*

$y'' - (y')^3 + y^2 = \sin(x)$ - *e.d.o. de 2ª ordem*

$y''' - x^2 y' - 6y = 0$ - *e.d.o. de 3ª ordem*

$y'' = 3y.y' - y^2 + f(x,y)$ - *e.d.o. de 2ª ordem*

$y' + xy = e^x$ - *e.d.o. de 1ª ordem*

Exemplo 2 *Equações com derivadas parciais (de 2ª ordem)*

1. ***Equação de Laplace***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

2. ***Equação de difusão ou do calor***

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = 0$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

3. ***Equação das ondas***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = 0$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

O estudo deste capítulo incide sobre equações diferenciais ordinárias. Constitui uma abordagem elementar, focando apenas a resolução de alguns tipos de equações ordinárias mais comuns em problemas de Economia. Mais precisamente:

- Equações Diferenciais Lineares
  - Equações lineares de primeira ordem
  - Equações lineares de ordem superior (com enfoque para $n = 2$)
- Equações Diferenciais de Primeira Ordem
  - Equações diferenciais de variáveis separáveis
  - Equações de Bernoulli

Vamos introduzir a definição rigorosa.

Definição 3 *Chama-se* ***equação diferencial ordinária de ordem*** **n** *a toda a igualdade que envolva uma função y, definida e de classe* $\mathcal{C}^n$ *num intervalo aberto de* $\mathbb{R}$*, e algumas das suas derivadas, bem como a variável independente x. Mais precisamente,*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{5.1}$$

onde F é uma função dada definida num aberto U de $\mathbb{R}^{n+2}$.
Uma função $y(x)$ *diz-se* ***solução da equação diferencial*** *(5.1) se for n vezes diferenciável num certo intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *e, ao ser substituída na equação, transformar esta numa igualdade. O conjunto de todas as soluções de (5.1) designa-se por* ***solução geral.***

Definição 4 *Diz-se que a equação está na forma normal se estiver resolvida em ordem à derivada de maior ordem, isto é,*

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}).$$

Nota 5 *Tal como referimos em cima, a designação equação diferencial ordinária tem como contraponto a noção de equação diferencial parcial. De facto, define-se equação diferencial parcial como uma relação que envolve uma função de várias variáveis e as suas derivadas, bem como as próprias variáveis, o que é traduzido na igualdade seguinte*

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}}, \cdots, \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}\right) = 0,$$

em que os índices i_j designam um qualquer inteiro compreandido entre 1 *e* n.

5.2 Equações diferenciais lineares

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Uma **equação diferencial linear de 1ª ordem** é uma equação diferencial da forma

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{5.2}$$

onde a e b são funções reais, definidas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, contínuas, e $y = y(x)$ é a função incógnita.

Multipliquemos ambos membros da equação por $e^{Pa(x)}$. Então obtemos

$$e^{Pa(x)}y' + e^{Pa(x)}a(x)y = e^{Pa(x)}b(x)$$

e pela derivada do produto

$$\left(e^{Pa(x)}y\right)' = e^{Pa(x)}b(x).$$

Primitivando ambos os membros em ordem a x e resolvendo algebricamente em ordem a y, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
P\left[\left(e^{Pa(x)}y\right)'\right] &= P\left[e^{Pa(x)}b(x)\right] + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R} \\
e^{Pa(x)}y &= P\left[e^{Pa(x)}b(x)\right] + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R} \\
y &= e^{-Pa(x)}\left\{P\left[e^{Pa(x)}b(x)\right] + C\right\}, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Acabámos portanto de estabelecer o resultado

Teorema 6 *Sendo a e b funções contínuas num intervalo I, a equação diferencial linear de primeira ordem*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

tem como soluções as funções, definidas em I

$$y(x) = e^{-Pa(x)} \left\{ P\left[e^{Pa(x)}b(x)\right] + C \right\}, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

*O conjunto destas soluções designa-se habitualmente por **solução geral**.*

Nota 7 *Observemos que se a função a for identicamente nula, isto é, se $y' = b(x)$, trata-se de um problema de primitivação comum. Como é sabido, se estivermos interessados em determinar a solução com a condição inical $y(x_0) = y_0$, com $x_0 \in I$ e y_0 dados, a solução é única e é dada por $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s)\,ds$. Analogamente, se em (5.2) prescrevermos o valor da solução num ponto x_0, a constante C fica univocamente determinada, o que significa unicidade de solução, como veremos em seguida.*

Problema de Valores Iniciais (PVI)
- para equações diferenciais lineares de primeira ordem

Consideremos a equação diferencial de primeira ordem (5.2) com uma condição prescrita, isto é,

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= b(x) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dado que como primitiva de uma função pode ser escolhido o integral indefinido, então, dado $x_0 \in I$, a solução da equação (5.2) pode ser escrita na forma

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \left\{ \int_{x_0}^{x} \left[e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t) \right] dt + C \right\},$$

constatando-se assim que $C = y(x_0)$. Logo, se não pretendermos apenas a solução geral, mas sim uma solução particular que no ponto x_0 valha um valor pre-fixado y_0, então a constante C fica univocamente determinada, o que enunciamos no resultado seguinte.

Teorema 8 *Dados $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, o problema de valores iniciais em I (5.4), também designado por problema de Cauchy, tem uma única solução definida em I por*

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \int_{x_0}^{x} \left[e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t) \right] dt.$$

5.3 Equação Diferencial Ordinária Linear de ordem superior

Uma **equação diferencial linear de 2ª ordem** é uma equação diferencial da forma
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{5.5}$$
onde a, b e f são funções reais, definidas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, contínuas.

No âmbito do curso que apresentamos, as equações de ordem superior que consideraremos são precisamente as de segunda ordem. Apresentamos contudo alguns elementos de enquadramento mais geral, que obviamente se aplicam à segunda ordem.

Definição 9 *Chama-se* ***equação diferencial linear de ordem*** n *a toda a equação diferencial da forma*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f(x) \tag{5.6}$$

onde as funções f *e* a_k, $(k = 1, 2, ..., n)$*, são funções contínuas num intervalo* I*. Se* $f = 0$*, a equação diz-se* ***homogénea.***

Se considerarmos o conjunto $C^n(\mathbb{R})$ de todas as funções reais n vezes continuamente diferenciáveis, isto é, funções contínuas com derivadas até à ordem n, contínuas também, podemos definir em $C^n(\mathbb{R})$ o operador diferencial D^k que a cada função associa a sua derivada de ordem k, isto é,

$$D^k(g) = g^{(k)}$$

para cada $k = 1, 2, 3, ..., n$. Assim, podemos considerar o operador diferencial linear
$$L = D^{(n)} + a_1(x)D^{(n-1)} + a_2(x)D^{(n-2)} + ... + a_n(x)I$$
e a equação diferencial linear de ordem n pode assumir a forma

$$L(y) = f(x).$$

Observemos que para quaisquer funções $f, g \in C^n(\mathbb{R})$ e números reais α e β tem-se
$$D^k(\alpha f + \beta g) = \alpha D^k(f) + \beta D^k(g),$$
o que implica que

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g).$$

Esta propriedade de L traduz-se dizendo que o operador diferencial é linear e daí a designação de equação diferencial linear.

Problema de Valores Iniciais (PVI)
- para equações diferenciais lineares de ordem n

Apresentamos em seguida o teorema de existência e unicidade de solução para ordem n análogo ao que enunciámos anteriormente para a primeira ordem.

Teorema 10 *Consideremos o problema de valores iniciais PVI constituído pela equação diferencial de ordem n*

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f(x)$$

com as n condições inciais

$$y(x_0) = b_1,\ y'(x_0) = b_2,\ y''(x_0) = b_3, ..., y^{(n-1)}(x_0) = b_n,$$

onde $x_0 \in I$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ são números dados. Então o problema PVI tem uma e uma só solução $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, isto é, uma única função que satisfaz em I a equação dada, bem como as condições iniciais no ponto x_0.

O resultado seguinte contém indicação sobre a constituição da solução da equação diferencial linear de ordem n.

Proposição 11 *A solução geral da equação de ordem n (5.6) fica completamente determinada a partir da solução geral da equação homogénea associada e de uma solução particular de (5.6).*

Dem Suponhamos conhecida uma solução particular de (5.6) y_p e tentemos encontrar as restantes soluções y tais que $Ly = f$. Como L é um operador linear, tem-se que

$$L(y - y_p) = Ly - Ly_p = f - f = 0,$$

o que mostra que $y - y_p$ é solução da equação homogénea associada. Escrevendo $y = (y - y_p) + y_p$ observa-se então que cada solução y de (5.6) é soma de uma solução da equação homogénea associada com uma solução particular de (5.6).

Solução geral de (5.6) A proposição anterior põe em destaque que a solução geral da equação diferencial de ordem n (5.6), é soma de uma solução particular da equação, y_p, com a solução geral da equação homogénea associada, y_h,isto é

$$y_g = y_p + y_h, \tag{5.7}$$

o que nos fornece um modo de resolução através dos *passos seguintes*

1. Determinação da solução geral da equação homogénea associada y_h.

2. Determinação de uma solução particular y_p de (5.6).

3. Estabelecimento da solução geral de (5.6) $y = y_h + y_p$.

Nota 12 *A expressão* $y = e^{-Pa(x)} \left\{ P\left[e^{Pa(x)}b(x)\right] + C \right\}$, *com* $C \in \mathbb{R}$ *traduz exactamente o que acabámos de dizer para o caso* $n = 1$, *isto é, para a equação linear de primeira ordem (5.2). Com efeito, escrevendo (**??**) na forma*

$$y(x) = e^{-Pa(x)} P\left[e^{Pa(x)}b(x)\right] + Ce^{-Pa(x)}, \quad \text{com } C \in \mathbb{R},$$

podemos observar que $y_h(x) = Ce^{-Pa(x)}$, *com* $C \in \mathbb{R}$, *é solução geral da equação linear homogénea* $y' + a(x)y = 0$ *e* $y_p(x) = e^{-Pa(x)}P\left[e^{Pa(x)}b(x)\right]$ *é uma solução de (5.2).*

Não existe teoria geral para a determinação de soluções de equações lineares. Vamos, contudo, estudar o caso particular das equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes.

5.3.1 Equações diferenciais lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes

Consideremos agora o caso $n = 2$ com coeficientes constantes, isto é,

$$y'' + by' + cy = f.$$

A proposição anterior e as considerações feitas levam-nos então a considerar os três passos referidos. Comecemos pelo primeiro, isto é, por analisar as equações homogénas a fim de determinarmos as respectivas soluções gerais y_h.

Solução geral da equação homogénea

Consideremos a equação linear homogénea de coeficientes constantes

$$Ly \equiv y'' + by' + cy = 0, \tag{5.8}$$

com $b, c \in \mathbb{R}$. A resolução desta equação passa pela determinação das raízes do polinómio

$$D^2 + bD + c$$

a que se chama **polinómio característico**. Este passo pode ser sugerido pelo facto seguinte: a função exponencial, e^{Dx}, cujas derivadas de qualquer ordem são também funções exponenciais, apresenta-se como uma boa candidata a solução particular da equação homogénea desde que o coeficiente

D se ajuste adequadamente. Com efeito, e^{Dx} será solução da equação homogénea se e só se $\left(e^{Dx}\right)'' + b\left(e^{Dx}\right)' + ce^{Dx} = 0$. Tem-se então as seguintes equivalências:

$$\begin{array}{rcl} \left(e^{Dx}\right)'' + b\left(e^{Dx}\right)' + ce^{Dx} & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow & \\ D^2e^{Dx} + bDe^{Dx} + ce^{Dx} & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow & \\ \left(D^2 + bD + c\right)e^{Dx} & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow & \\ D^2 + bD + c & = & 0. \end{array} \tag{5.9}$$

Tratando-se de um polinómio do segundo grau, ele tem exactamente duas raízes, que podem ser reais ou complexas. Assim teremos três casos, para os quais apresentaremos, sem demonstração, a expressão da solução geral, y_h, da equação homogénea (5.9), (no que se segue $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)):

1. **Raízes reais diferentes $\mathbf{D}_1$ e $\mathbf{D}_2$**

$$y_h(x) = C_1e^{D_1x} + C_2e^{D_2x},$$

isto é, trata-se da combinação linear das funções e^{D_1x} e e^{D_2x}, que, obviamente por (5.9), são soluções de (5.8).

2. **Raízes reais iguais (uma raiz dupla) D**

$$y_h(x) = \left(C_1 + C_2x\right).e^{Dx},$$

sendo neste caso combinação linear das funções e^{Dx} e $x.e^{Dx}$. É claro por (5.9) que e^{Dx} é solução de (5.8); quanto a $x.e^{Dx}$ basta substituir em (5.8).

3. **Raízes complexas $\mathbf{D} = \alpha \pm \mathbf{i}\beta$**

$$y_h(x) = C_1e^{\alpha x}cos(\beta x) + C_2e^{\alpha x}sin(\beta x),$$

isto é, combinação linear das funções $e^{\alpha x}cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}sin(\beta x)$, que são soluções de (5.8).

Solução particular da equação completa

Vamos tentar "descobrir" uma solução particular da equação diferencial linear não homogénea de coeficientes constantes

$$y'' + by' + cy = f(x).$$

Para tal, experimentaremos como solução uma função do "tipo" do segundo membro e utilizaremos o método dos coeficientes indeterminados. Restringir-nos-emos aos casos de funções de segundo membro que aparecem com mais frequência:

1. Funções exponenciais

Se $f(x) = s.e^{ax}$, $s, a \in \mathbb{R}$, procuraremos como solução particular uma função do tipo $y_p = ke^{ax}$.

Por exemplo, consideremos a equação

$$y'' + 3y' + 7y = 5e^{3x}.$$

Existirá uma solução particular da equação da forma $y_p = ke^{3x}$, se e só se, por definição de solução, se verificar

$$\begin{aligned}
\left(ke^{3x}\right)'' + 3\left(ke^{3x}\right)' + 7ke^{3x} &= 5e^{3x} \\
&\Longleftrightarrow \\
9ke^{3x} + 9ke^{3x} + 7ke^{3x} &= 5e^{3x} \\
&\Longleftrightarrow \\
25k.e^{3x} &= 5e^{3x} \\
&\Longleftrightarrow \\
k &= \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Logo $y_p = \frac{1}{5}e^{3x}$ é solução particular da equação dada.

2. Polinómios

Se $f(x)$ for um polinómio procuraremos como solução particular uma função y_p que seja também um polinómio do mesmo grau. Por exemplo, consideremos a equação

$$y'' - 4y' + 2y = 4x^2.$$

Neste caso $f(x) = 4x^2$, isto é, o segundo membro é um polinómio de segundo grau. Vamos tentar descobrir uma solução particular procurando entre os polinómios do segundo grau, isto é, fazendo nessa tentativa $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Analogamente ao caso anterior esta função será solução particular da equação se e só se

$$\begin{aligned}
\left(Ax^2 + Bx + C\right)'' - 4\left(Ax^2 + Bx + C\right)' + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) &= 4x^2 \\
&\Longleftrightarrow \\
2A - 4(2Ax + B) + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) &= 4x^2.
\end{aligned}$$

Simplificando o primeiro membro obtem-se

$$2Ax^2 + (2B - 8A)\,x + 2A - 4B + 2C = 4x^2$$

donde, pelo método dos coeficientes indeterminados,

$$2A = 4; \quad 2B - 8A = 0 \quad \text{e} \quad 2A - 4B + 2C = 0.$$

Logo

$$A = 2, \quad B = 8 \quad \text{e} \quad C = 14.$$

donde $y_p = 2x^2 + 8x + 14$ é solução particular da equação dada.

Obs.: Se o segundo membro for constante, isto é, $f(x) = M$, ensair-se-á como solução particular precisamente uma constante, isto é, $y_p = K$. Trata-se de um caso particular de polinómio - polinómio de grau zero.

3. Funções seno ou co-seno

Se o segundo membro $f(x)$ for um seno, $\sin(ax)$, ou um co-seno, $\cos(ax)$, procuraremos a solução particular entre as funções do tipo $y_p = A.\sin(ax) + B.\cos(ax)$. Consideremos, por exemplo, a equação

$$y'' - 3y' + 2y = 20\sin(2x)$$

e procuremos uma solução particular do tipo $y_p = A.\sin(2x) + B.\cos(2x)$. Substituindo na equação, obter-se-á

$$\begin{aligned}
&(A.\sin(2x) + B.\cos(2x))'' - 3\,(A.\sin(2x) + B.\cos(2x))' + 2[A.\sin(2x)+ \\
&\qquad\qquad +B.\cos(2x)] = 20\sin(2x) \\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow \\
&-4A.\sin(2x) - 4B.\cos(2x) - 6A\cos(2x) + 6B.\sin(2x) + 2A.\sin(2x)+ \\
&\qquad\qquad +2B.\cos(2x) = 20\sin(2x) \\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow \\
&(-4A + 6B + 2A).\sin(2x) + (-4B - 6A + 2B).\cos(2x) = 20\sin(2x),
\end{aligned}$$

donde

$$-4A + 6B + 2A = 20 \quad \text{e} \quad -4B - 6A + 2B = 0.$$

Logo

$$A = -1 \quad \text{e} \quad B = 3$$

donde $y_p = -\sin(2x) + 3\cos(2x)$ é uma solução particular da equação dada.

Em resumo, para os diferentes tipos de segundo membro que analisámos, as soluções ensaio estão na tabela

f(x)	**Sugestão de solução particular y_p**
C (constante)	K (constante)
e^{ax}	ke^{ax}
$ax^2 + bx + c$	$Ax^2 + Bx + C$
$\sin(ax)$ ou $\cos(ax)$	$A.\sin(ax) + B.\cos(ax)$
$e^{ax}\sin(bx)$ ou $e^{ax}\cos(bx)$	$Ae^{ax}\sin(bx) + Be^{ax}\cos(bx)$
$e^{ax}\left(a_0x^2 + b_0x + c_0\right)$	$e^{ax}\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)$

Sempre que o segundo membro da equação completa for um dos indicados na tabela e a função sugerida para solução particular não for solução da equação, dever-se-á multiplicar a função pela variável independente x e averiguar se a nova função já é uma solução particular da equação completa (se ainda não for, dever-se-á experimentar a função sugerida multiplicada por x^2 e assim sucessivamente).

Solução geral da equação completa

Usando a Proposição 11 para o caso $n = 2$, isto é, para o caso das equações diferenciais lineares de segunda ordem, podemos afirmar que a solução geral da equação completa é da forma

$$y = y_h + y_p,$$

onde y_h é a solução geral da equação homogénea e y_p é uma solução particular da equação completa.

Exemplo 13 ***1.*** *Determinação da solução geral de* $y'' + 3y' + 7y = 5e^{3x}$.

- *Determinação da solução geral* y_h *da equação homogénea associada*
  Consideremos o polinómio característico e calculemos os zeros

  $$D^2 + 3D + 7 = 0 \iff D = \frac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{19}}{2}$$

  Então

  $$y_h(x) = e^{-\frac{3}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{19}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{19}}{2}x\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- *Determinação de uma solução particular* y_p *da equação dada*
  Tomemos como possível solução particular da equação dada $y_p = ke^{3x}$. Então, por definição de solução,

  $$\left(ke^{3x}\right)'' + 3\left(ke^{3x}\right)' + 7ke^{3x} = 5e^{3x},$$

  isto é,

  $$9ke^{3x} + 9ke^{3x} + 7ke^{3x} = 5e^{3x},$$

  o que é equivalente a

  $$25ke^{3x} = 5e^{3x},$$

  ou seja,

  $$k = \frac{1}{5}.$$

  Logo $y_p = \frac{1}{5}e^{3x}$ é solução particular da equação dada.

- *Solução geral da equação dada*
  Pelo que vimos anteriormente temos como solução geral da equação dada
  $$y(x) = \frac{1}{5}e^{3x} + e^{-\frac{3}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{19}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{19}}{2}x\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

5.4 Equações diferenciais de primeira ordem

Pelo que vimos anteriormente, uma equação diferencial de primeira ordem é uma equação da forma
$$F(x, y, y') = 0$$
ou, quando expressa na forma normal,
$$y' = \varphi(x, y).$$

A resolução de equações diferenciais não lineares é tarefa difícil. Nesta secção vamos estudar métodos de cálculo de soluções de dois tipos de equações diferenciais de primeira ordem não (necessariamente) lineares: as equações com variáveis separáveis e a equação de Bernoulli.

5.4.1 Equações com variáveis separáveis

Definição 14 *Dada uma equação diferencial de primeira ordem $y' = \varphi(x, y)$ diz-se que se trata de uma* ***equação diferencial de variáveis separáveis*** *se a função φ for produto de duas funções, uma função f de variável x e outra função g de variável y, isto é, $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$.*

Proposição 15 *Seja*
$$y' = f(x)g(y) \tag{5.10}$$
uma equação diferencial de variáveis separáveis, em que f e g são contínuas num intervalo de $\mathbb{R}$. Então
(i) Todos os valores reais onde g seja nula são também soluções da equação, isto é, se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) = 0$, então a função constante $y(x) \equiv a$ é solução de (5.10).
(ii) Seja $g \neq 0$ num intervalo I e designemos por F e Γ duas primitivas de f e $\gamma = \dfrac{1}{g}$, respectivamente. Então a solução geral é dada em I na forma implícita por
$$\Gamma(y(x)) = F(x) + C \tag{5.11}$$

Observe-se que Γ poderá não ser invertível, o que significa que poderemos não ter uma expressão explícita da solução de (5.11).

Dem O ponto (i) é evidente pois, sendo $y(x) \equiv a$ e $g(a) = 0$, substituindo em (5.10) obtem-se a igualdade trivial $0 = 0$. Quanto ao ponto (ii), basta atender a que

$$y' = f(x)g(y)$$

é equivalente a

$$\frac{1}{g(y\,(x))} y'(x) = f(x),$$

isto é,

$$\Gamma'\,(y\,(x))\,y'(x) = f(x),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\,(\Gamma\,(y\,(x))) = \frac{d}{dx} F\,(x)\,.$$

Logo $y\,(x)$ é solução se e só se

$$\Gamma\,(y\,(x)) = F\,(x) + C, \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Nota 16 *A demonstração do ponto (ii) fornece-nos um "modo formal" de calcular a solução de (5.10). Com efeito, vejamos "formalmente"*

$$\begin{aligned} y' &= f(x)g(y) \iff \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \\ &\iff \frac{1}{g\,(y)} dy = f\,(x)\,dx \\ &\iff \int \frac{1}{g\,(y)} dy = \int f\,(x)\,dx + C, \qquad (C \in \mathbb{R})\,, \end{aligned}$$

onde $\int$ *indica uma primitiva. Evidentemente, o cálculo anterior é feito no pressuposto de que a função* g *não se anula. Os valores* a *onde* g *se anular constituem também, como vimos pelo ponto (i), soluções da equação, mais precisamente soluções constantes* $y(x) \equiv a$.

Exemplo 17 ***1.*** *Calculemos a solução de*

$$y' = x^2 e^{2y}.$$

Ora, usando o modo formal referido anteriormente,

$$\begin{aligned} y' &= x^2 e^{2y} \iff \frac{dy}{dx} = x^2 e^{2y} \\ &\iff e^{-2y} dy = x^2 dx \\ &\iff \int e^{-2y} dy = \int x^2 dx + C \end{aligned}$$

o que mostra que a solução geral é dada na forma implícita por

$$-\frac{e^{-2y}}{2} = \frac{x^3}{3} + C.$$

Observemos que pode ser explicitada,

$$y(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(-2\frac{x^3}{3} - 2C\right), \quad (C \in \mathbb{R}),$$

num intervalo adequado (qual?).

2. *Considerando agora*

$$y' = x^2(y-2)^4,$$

vemos de imediato que $y(x) \equiv 2$ *é uma solução da equação. Seja agora* $y > 2$*. Então*

$$\begin{aligned} y' &= x^2(y-2)^4 \iff \frac{dy}{dx} = x^2(y-2)^4 \iff \frac{1}{(y-2)^4}dy = x^2dx \\ &\iff \int \frac{1}{(y-2)^4}dy = \int x^2dx + C, \end{aligned}$$

o que mostra que a solução geral é dada na forma implícita por

$$-\frac{1}{3(y-2)^3} = \frac{x^3}{3} + C.$$

Observemos que, neste caso também pode ser explicitada. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3(y-2)^3} &= \frac{x^3}{3} + C \\ &\iff -3(y-2)^3 = \frac{3}{x^3+3C} \\ &\iff y = \sqrt[3]{-\frac{1}{x^3+3C}} + 2, \ (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

donde

$$y(x) = \sqrt[3]{-\frac{1}{x^3+3C}} + 2, \ (C \in \mathbb{R})$$

num intervalo adequado (qual?).

5.4.2 Equação de Bernoulli

Uma das técnicas que em alguns casos é possível aplicar consiste na transformação de uma equação não linear numa linear. É o caso da **equação de Bernoulli.** Trata-se de uma equação não linear da forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

onde $n > 1$ e p e q são duas funções contínuas no intervalo dado I. É possível transformar a equação de Bernoulli numa equação linear. Com efeito, multiplicando a equação por y^{-n} obtemos

$$y'y^{-n} + p(x)yy^{-n} = q(x)y^n y^{-n},$$

isto é,

$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Ou, escrito de outro modo,

$$\frac{1}{1-n}\left(y^{1-n}\right)' + p(x)y^{1-n} = q(x), \tag{5.12}$$

uma vez que

$$\left(y^{1-n}\right)' = (1-n)\, y^{-n}y'.$$

Defina-se então a função $z(x)$

$$z\,(x) = [y\,(x)]^{1-n}\,.$$

Substituindo em (5.12), obtemos

$$\frac{z'}{(1-n)} + p(x)z = q(x),$$

isto é, obtemos a equação diferencial linear de primeira ordem

$$z' + (1-n)\, p(x)z = (1-n)\, q(x). \tag{5.13}$$

Chegados a este ponto, aplica-se o processo de cálculo de soluções de EDO's lineares de primeira ordem. Uma vez determinada $z(x)$, resolve-se em ordem a $y(x)$, obtendo assim a solução $y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-n}}$ para a equação de Bernoulli dada.

O que acabámos de ver fornece-nos um algoritmo para a determinação da solução de Bernoulli.

Exemplo 18 *Vejamos como resolver o seguinte problema de valores iniciais*

$$\begin{aligned} x^2y' + 2xy &= y^3 \\ \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da equação dada por x^2, $(x \neq 0$, *por exemplo* $x \in]0, +\infty[)$ *obtemos*

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}y^3,$$

donde, multiplicando tudo por y^{-3} *e fazendo* $z = y^{-2}$, *obtemos, pelo processo indicado anteriormente, a equação linear de primeira ordem*

$$z' + (1-3)\,\frac{2}{x}z = (1-3)\,\frac{1}{x^2}, \tag{5.14}$$

isto é,

$$z' - \frac{4}{x}z = -\frac{2}{x^2}.$$

Resolvendo agora esta equação

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{P\left(\frac{4}{x}\right)}\left[P\left(e^{P\left(-\frac{4}{x}\right)}\left(-\frac{2}{x^2}\right)\right)+C\right] \\ &= e^{4\ln x}\left[Pe^{-4\ln x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)+C\right] \\ &= x^4\left[Px^{-4}\left(-\frac{2}{x^2}\right)+C\right] \\ &= x^4\left[P\left(-2x^{-6}\right)+C\right] \\ &= x^4\left[\frac{2}{5}x^{-5}+C\right] \\ &= \frac{2}{5x}+C\ x^4, \end{aligned}$$

com $C \in \mathbb{R}$. *Agora basta ter em conta que* $z = y^{-2}$ *para determinar* $y(x)$.