

PROBABILIDADES

25 de janeiro de 2011

Exame Final – Época de Recurso

Duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. Um atuário verificou que o número de sinistros/ano por apólice, em determinada carteira, é uma v.a. X com distribuição de Poisson, em que a probabilidade de uma qualquer apólice dar origem a 2 sinistros é tripla da probabilidade de dar origem a 4 sinistros. Verificou ainda que o número de sinistros/ano por apólice, noutra carteira do mesmo ramo, é uma v.a. Y que não assume valores superiores a 8 e tem distribuição Binomial com média igual à de X .
 - a) Justifique que $f(x) = \frac{e^{-2} 2^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$ e $f(y) = \binom{8}{y} \left(\frac{1}{4}\right)^y \left(\frac{3}{4}\right)^{8-y}, y = 0, \dots, 8$, e compare as duas distribuições recorrendo aos respetivos coeficientes de variação ($CV = \sigma/\mu$).
 - b) Calcule $P(X \geq 3)$ e $P(Y \leq 3)$.
 - c) Sabendo que $\rho_{XY} = 0.4$, calcule $E[Z]$ e $Var(Z)$, $Z = 2X - 3Y$.
 - d) Relativamente a uma apólice da primeira carteira, que entrou em vigor a 1 de maio de 2010, já deram entrada 3 participações. Calcule a probabilidade de essa apólice originar 5 sinistros no ano em curso (que termina a 30 de abril).
 - e) Uma grande empresa detém 15 das referidas apólices, das quais 10 são da primeira carteira. Periodicamente, um funcionário faz a análise dos contratos, para ver se há possibilidades de negociar condições mais vantajosas. Numa dessas vezes, foi retirando os contratos um por um, sem qualquer critério, e quando terminou o dia tinha analisado 6. Qual a probabilidade de ter escolhido 3 de cada carteira?
2. Num outro estudo, o atuário acima concluiu que o custo anual total (milhões de euros) reportado por uma companhia com o seu seguro automóvel pode ser decomposto em danos materiais (v.a. X_1) e em responsabilidade civil (v.a. X_2), com f.d.p. conjunta

$$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 + 2 - x_2}{4}, \quad 0 < x_1 < 1; \quad 0 < x_2 < 2.$$

- a) O acontecimento A realiza-se quando $X_1 \leq 0.5$ e o acontecimento B quando $X_1 + X_2 \geq 1$. Calcule e interprete $P(A \cup B)$ e $P(A - B)$.
 - b) Usando $f(x_1, x_2)$ e uma das f.d.p. marginais, calcule a probabilidade de o custo total exceder 2 milhões de euros, num ano em que se sabe que os custos com responsabilidade civil são inferiores a 1.5 milhões.
 - c) Desenhe o gráfico de uma das curvas de regressão (tipo I) e comente o interesse da informação que fornece.
 - d) No país há 34 companhias com carteiras independentes, mas idênticas à carteira em análise. Calcule a probabilidade aproximada de esse segmento suportar mais de 20 milhões de euros/ano, com os danos materiais resultantes de sinistros automóveis.
3. O volume dos prémios mensais da companhia C_1 é uma v.a com f.d.p. f , positiva e contínua num intervalo $]a, b[$. A companhia C_2 tem um volume de prémios mensais igual à soma de 120 com metade do volume dos prémios de C_1 .
 Exprima a f.d.p. do volume mensal de prémios cobrados por C_2 , como função de f, a e b .