Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa

PROBABILIDADES

7 de janeiro de 2011 Exame Final – Época Normal Duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. Seja (X,Y) um par aleatório tal que

$$f(x,y) = ky^{-3}(x+1), 0 < x < 1, y > 1 \quad \text{e} \quad f_1(x) = \frac{2}{3}(x+1), 0 < x < 1.$$

a) Mostre que $k = \frac{4}{3}$ e verifique que X e Y são v.a. independentes.

b) Calcule $P[X < 0.6]$, recorrendo sucessivamente a $f(x,y)$ e a $f(x|y=6)$.

c) Caracterize $F_2(y)$ e use-a para calcular $P\left(2Y > 6 \middle| \frac{Y}{2} < 7\right)$.

d) Calcule a probabilidade aproximada de a média aritmética de 50 observações independentes da v.a. X não exceder $E[X] - \frac{2}{9}$.

e) Obtenha a f.g.m. da v.a. $Z = X^2 + 2X$.

2. Um dispositivo que mede e regista continuamente a atividade sísmica foi colocado numa região remota. O tempo T que decorre até que o dispositivo se avarie é uma v.a. com distribuição exponencial de média 3 anos. O funcionamento do dispositivo é controlado de 2 em 2 anos: se estiver avariado, é substituído; se não, nada se faz.

a) Calcule a probabilidade de os técnicos que fazem o controlo encontrarem o dispositivo avariado.

b) A dada altura foram colocados 5 desses aparelhos, de funcionamentos independentes. Qual a probabilidade de, em 3 controlos sucessivos, os técnicos encontrarem os 5 aparelhos em funcionamento no primeiro e no segundo controlos e encontrarem todos avariados no terceiro?

c) Relativamente aos 5 aparelhos de b), calcule a probabilidade de a sua duração total não ultrapassar 24 anos.

d) Em determinada região, quando se faz o primeiro controlo no dispositivo incorpora-se-lhe um alarme que sinalizará a existência de avaria, mal esta ocorra. Explique o significado da v.a. $V = \max(T,2)$ e calcule o seu valor esperado.

3. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. mutuamente independentes tais que $X_i \sim \text{logNormal}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1,2,..,n.$ Mostre que $\Pi_n = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \sim \text{logNormal}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$ e também que $\frac{1}{\Pi_n} \sim \text{logNormal}\left(-\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$.

Cada alínea das questões 1 e 2 e a questão 3 têm cotação 20.