Sistemas de equações não lineares

MCEF

2011/12

ISEG 100 1911-2011 ANOS

100 ANOS A PENSAR NO FUTURO

Sistemas de Equações não lineares

Determinar os pontos $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que verificam as condições:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Determinar x, y tais que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \\ \cos x + \cos y = 0 \end{cases}$$

Terá soluções ??
Investigar graficamente…

Preliminares (Normas de vectoriais e matriciais)

- No estudo dos métodos numéricos para equações não lineares, nomeadamente no estudo do erro cometido, isto é, da precisão dos resultados.

	Sol. Numérica	Sol. Exacta	Erro
$n=1$	$\tilde{x}$	x	$\|\tilde{x}-x\|$
$n=2$	$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$	(x_1, x_2)	??
Em geral	$(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)$	$(x_1, \cdots, x_n)$	??

Como medir a dimensão de vetores e matrizes ?

Norma Euclideana

$$\|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\|(x_1, x_2, x_3)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\|(x_1, x_2, x_3, x_4)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

Em geral,

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

Outras Normas

Norma $\|\cdot\|_1$

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

$$\|(x_1, x_2, x_3)\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

$$\|(x_1, x_2, x_3, x_4)\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$$

Em geral,

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Norma $\|\cdot\|_\infty$

$$\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

$$\|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$$

$$\|(x_1, x_2, x_3, x_4)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4|\}$$

Em geral,

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty = \max_{i=1=\cdots n} |x_i|$$

Porquê considerar várias normas ?

$$d(A,B) = ??$$

Exemplos

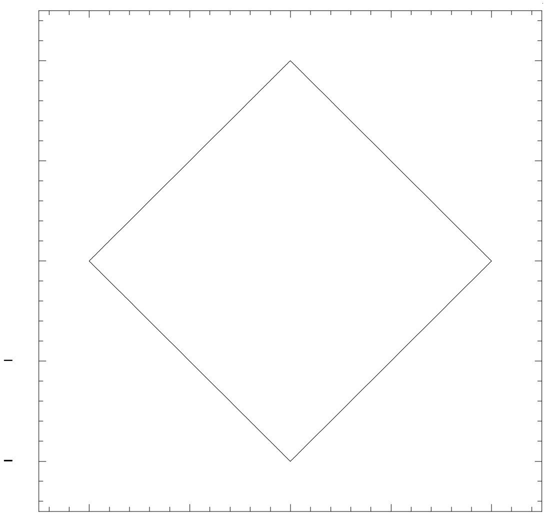
Seja $x = (1, 3, 0, -1, 0)$. Tem-se

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{11}$$

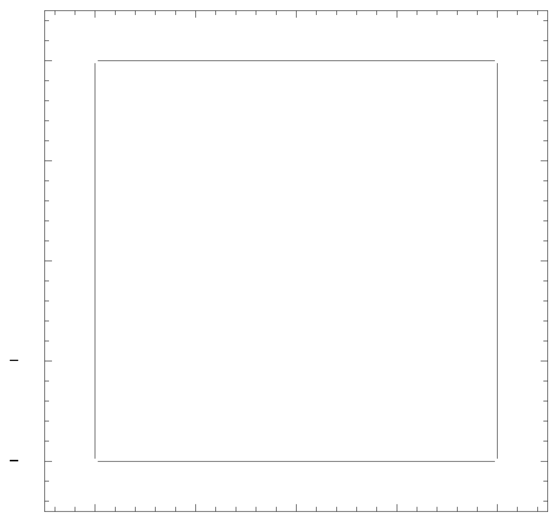
$$\|x\|_1 = |1| + |3| + |0| + |-1| + |0| = 5$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|1|, |3|, |0|, |-1|, |0|\} = 3$$

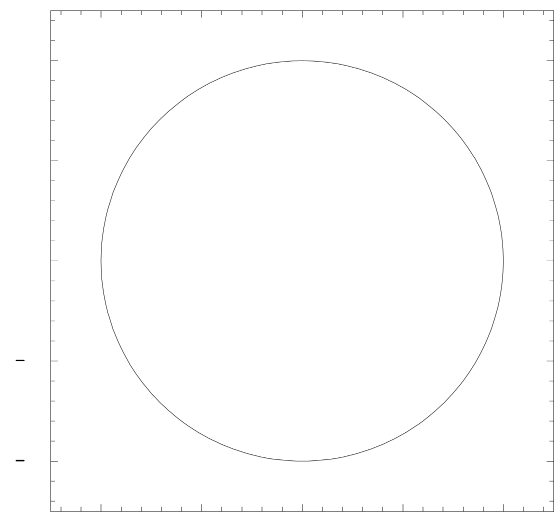
Interpretação Geométrica



$$\|x\|_1 = 1$$



$$\|x\|_\infty = 1$$



$$\|x\|_2 = 1$$

Actividade

- Escrever uma função que, dado um vector de dimensão qualquer, e uma das normas estudadas, devolva o seu valor.

Normas Matriciais

- Do mesmo modo que medimos "comprimentos" ou normas de vectores, também podemos faze-lo no caso de matrizes.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definem-se

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

Exemplo (norma matricial)

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0.25 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max\{|1| + |0.5| + |-1.5|, |0| + |0.25| + |-1|, |0| + |2| + |0|\} \\ &= \max\{3, 1.25, 2\} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max\{|1| + |0| + |0|, |0.5| + |0.25| + |2|, |-1.5| + |-1| + |0|\} \\ &= \max\{1, 2.75, 2.5\} = 2.75 \end{aligned}$$

Actividade

- Escrever um programa que, dada uma matriz quadrada, calcule as normas matriciais referidas anteriormente.

Método do Ponto Fixo para Sistemas de Equações

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$x = G(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots \\ x_n = g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} x = \cos(0.5y) \\ \\ y = \sin(0.3x) \end{cases}$$

Teorema Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e não vazio, onde para uma certa norma $\|\cdot\|$ se verifica

1. G é contínua e contractiva (no caso de ser diferenciável $L = \|J_G(x)\| < 1$).
2. G é invariante em Ω, i.e. $G(\Omega) \subset \Omega$.

Então o sistema de equações $x = G(x)$ tem uma e uma só solução $z \in \Omega$ e a sucessão $x_{m+1} = G(x_m)$ converge para z, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in \Omega$. Além disso temos as seguintes estimativas do erro cometido:

$$\|x_m - z\| \leq L\|x_{m-1} - z\|, \quad \|x_m - z\| \leq L^m\|x_0 - z\|$$

$$\|x_m - z\| \leq \frac{1}{1-L}\|x_m - x_{m-1}\|, \qquad \|x_m - z\| \leq \frac{L^m}{1-L}\|x_1 - x_0\|$$

Actividade

- Implementar o método do ponto fixo em Rn e resolver o último exemplo proposto.

Método de Newton para sistemas

Determinar os pontos $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que verificam as condições:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Usando $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ e $\boldsymbol{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ o sistema escreve-se na forma

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

Matriz Jacobiana

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$J_F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Método de Newton

Em $\mathbb{R}$ o método de Newton é da forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)$$

Em $\mathbb{R}^n$ temos

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow -J_F^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - J_F^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Se aplicarmos o método do ponto fixo usando $G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - J_F^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ somos conduzidos ao método de Newton generalizado.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - J_F^{-1}(\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$$

Algoritmo

1. Escolher uma aproximação inicial $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$
2. Para cada $k \geq 0$ fazer
   (a) Determinar $\boldsymbol{y}$, solução do sistema linear
   $$J_F(\boldsymbol{x}_k)\,\boldsymbol{y} = -F(\boldsymbol{x}_k)$$
   (b) Calcular a próxima iteração como sendo
   $$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}$$
3. Terminar quando $\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k\| < \varepsilon$, ou quando for atingido um número máximo de iterações.

Exemplo:

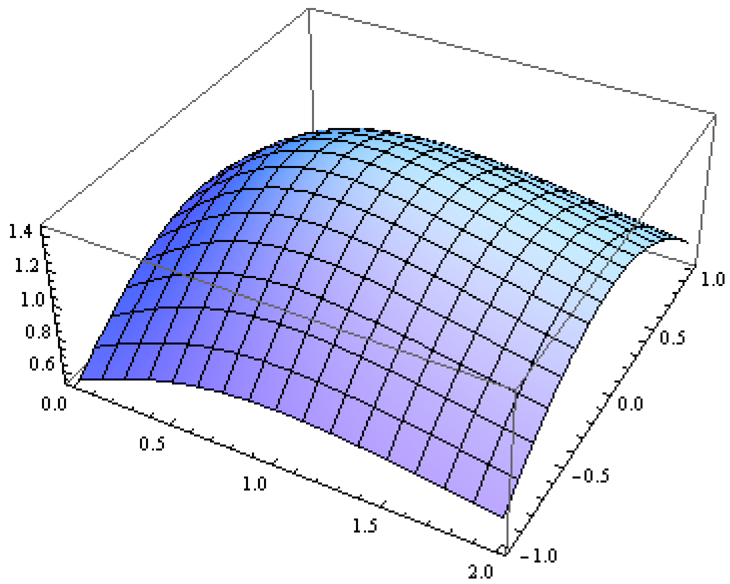
Determinar o ponto em que a função

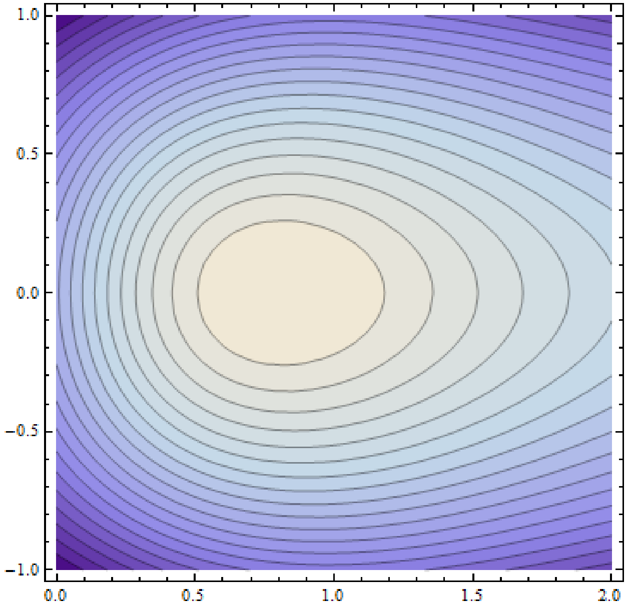
$$f(x,y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2+1} + \cos y$$

atinge o seu máximo no interior do quadrado $[0,2]\times[-1,1]$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{x^2+y^2+1} - \dfrac{2x\sin(x)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} = 0 \\[2ex] -\dfrac{2y\sin(x)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} - \sin(y) = 0 \end{cases}$$

Graficamente





Qual a aproximação inicial mais adequada ? Funciona Sempre ? Não!