Sistemas de equações lineares

MCEF

2011/12

Sistemas Lineares

O Sistemas lineares constituem um caso particular dos sistemas não lineares, sendo que os métodos estudados se aplicam também a estes. Chamamos sistema de equações lineares a qualquer sistema do tipo:

Determinar $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tais que:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Forma matricial

Os sistemas lineares podem ser escritos na sua forma matricial, tendo em conta a definição da operações de multiplicação de matrizes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$Ax = b$$

Em que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Métodos Iterativos para sistemas lineares (um exemplo)

Vamos tentar resolver o um sistema linear utilizando o método do ponto fixo. Para tal devemos reescrever o sistema na forma x = G(x), o que equivale a, em cada equação, isolar a respectiva variável. Uma forma de o fazer pode ser a seguinte:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \displaystyle\sum_{j\neq 1} a_{1j}x_j\right) \\ \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - \displaystyle\sum_{j\neq 2} a_{2j}x_j\right) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \displaystyle\sum_{j\neq n} a_{nj}x_j\right) \end{cases}$$

Método de Jacobi

O Processo descrito anteriormente conduz a um método conhecido como **Método de Jacobi,** que pode ser descrito pelo seguinte algoritmo

1. Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$.
2. para cada $k \geq 0$ calcular $x^{(k+1)}$ através da fórmula

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \cdots, n$$

3. Terminar o processo iterativo se $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$ (ou se for atingido um número máximo de iterações)

Convergência do Método de Jacobi

O Método de Jacobi pode ser obtido de uma forma um pouco diferente da apresentada, se começarmos por decompor a matriz A :

$$A = L + D + U$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Método de Jacobi

$$Ax = b \Leftrightarrow (L + D + U)x = b \Leftrightarrow Dx = b - (L + U)x$$

$$\Leftrightarrow x = D^{-1}(b - (L + U)x)$$

$$\Leftrightarrow x = D^{-1}b - D^{-1}(L + U)x$$

Assim, do ponto de vista matricial, a iteração do método de Jacobi pode ser calculada como:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}b - D^{-1}(L + U)x^{(k)}$$

Teorema. Considere o método iterativo $x^{(k+1)} = g + Cx^{(k)}$. O método é convergente se e só se $\|C\| < 1$, para alguma norma matricial. Em caso de convergência, esta não depende da aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Além disso temos a estimativa de erro a posteriori

$$\|z - x^{(k)}\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Obs 1: A convergir, o método converge para a solução do sistema linear $x = g + Cx$.

Obs 2: No caso do método de Jacobi, podemos usar este resultado com $g = D^{-1}b$ e $C = -D^{-1}(L + U)$.

Condições suficientes de convergência

A convergência do método de Jacobi depende na norma da matriz $C = -D^{-1}(L+U)$. Esta matriz é dada por

$$C = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & \frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

Condições suficientes de convergência

Pensando nas duas normas matriciais que estudámos, elas serão inferiores a 1 para a matriz C se o módulo de cada elemento na diagonal de A for estritamente superior a todos os elementos na mesma linha (no caso da norma infinito) ou na mesma coluna (no caso da norma 1). De facto,

$$\|C\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \qquad \|C\|_1 = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{i\neq j} \frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|}$$

Este facto motiva a definição seguinte:

Definição: Uma matriz quadrada A diz-se de diagonal estritamente dominante por linhas se e só se

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \cdots, n$$

Do mesmo modo A diz-se de diagonal estritamente dominante por colunas se e só se

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|, \quad i = 1, \cdots, n$$

Condições suficientes de convergência: O resultado

Teorema. Se a matriz A for de diagonal estritamente dominante por linhas (ou colunas) o método de Jacobi é convergente, qualquer que seja a aproximação inicial.

Obs: Esta condição não é necessária. O método pode convergir, mesmo que esta não se verifique. Mesmo que as normas $\|C\|_1$ e $\|C\|_\infty$ não sejam inferiores a 1, outras poderão ser.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como a matriz é de diagonal estritamente dominante por linhas, temos a garantia que o método de Jacobi é convergente. Além disso, neste caso, $\|C\|_\infty = \frac{3}{4}$. Sabemos então que

$$\begin{aligned} \|z - x^{(k)}\|_\infty &\leq \frac{(3/4)^k}{1 - 3/4} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \\ &= 4(3/4)^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \end{aligned}$$

Várias medidas do erro ...

k	$\|x^{(k)} - z\|_\infty$	$4(3/4)^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$	$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$
1	2.30769×10^{-1}	1.5	$5. \times 10^{-1}$
2	1.15385×10^{-1}	1.125	2.5×10^{-1}
5	1.20192×10^{-2}	4.74609×10^{-1}	3.125×10^{-2}
10	9.20222×10^{-4}	1.12627×10^{-1}	2.44141×10^{-3}
15	6.87379×10^{-5}	2.67269×10^{-2}	1.84059×10^{-4}
18	1.45298×10^{-5}	1.12754×10^{-2}	3.89218×10^{-5}
19	8.65643×10^{-6}	8.45657×10^{-3}	2.31862×10^{-5}
20	5.15695×10^{-6}	6.34242×10^{-3}	1.38134×10^{-5}

Método de Gauss-Seidel

$$Ax = b \Leftrightarrow (L + D + U)x = b \Leftrightarrow (L + D)x = b - Ux$$

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{(L + D)^{-1}(b - Ux)}_{G(x)}$$

A aplicação do método do ponto fixo conduz ao processo iterativo $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$:

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)} \Leftrightarrow x^{(k+1)} = (L + D)^{-1}(b - Ux^{(k)})$$

$$\Leftrightarrow (L + D)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)} \Leftrightarrow Dx^{(k+1)} = b - Ux^{(k)} - Lx^{(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Ux^{(k)} - Lx^{(k+1)})$$

Método de Gauss-Seidel

Algoritmo

1. Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)} \in -\mathbb{R}^n$.
2. Para cada $k \geq 0$ calcular

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right), \quad i = 1, \cdots, n$$

3. Parar se $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, ou se for atingido o número máximo de iterações pré-estabelecido.

Convergência do método de Gauss-Seidel

Trata-se de um método iterativo do tipo $x^{(k+1)} = g + Cx^{(k)}$ em que

$$g = (L + D)^{-1} b, \qquad C = -(L + D)^{-1} U$$

Assim é convergente se, e apenas se, se verificar $\|C\| < 1$, nalguma norma. Temos no entanto o seguinte resultado:

Teorema: Se a matriz do sistema for de diagonal estritamente dominante por linhas (ou colunas) o método de Gauss-Seidel é convergente, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.