Integração Numérica

MCEF

2011/12

100 ANOS A PENSAR NO FUTURO

Introdução

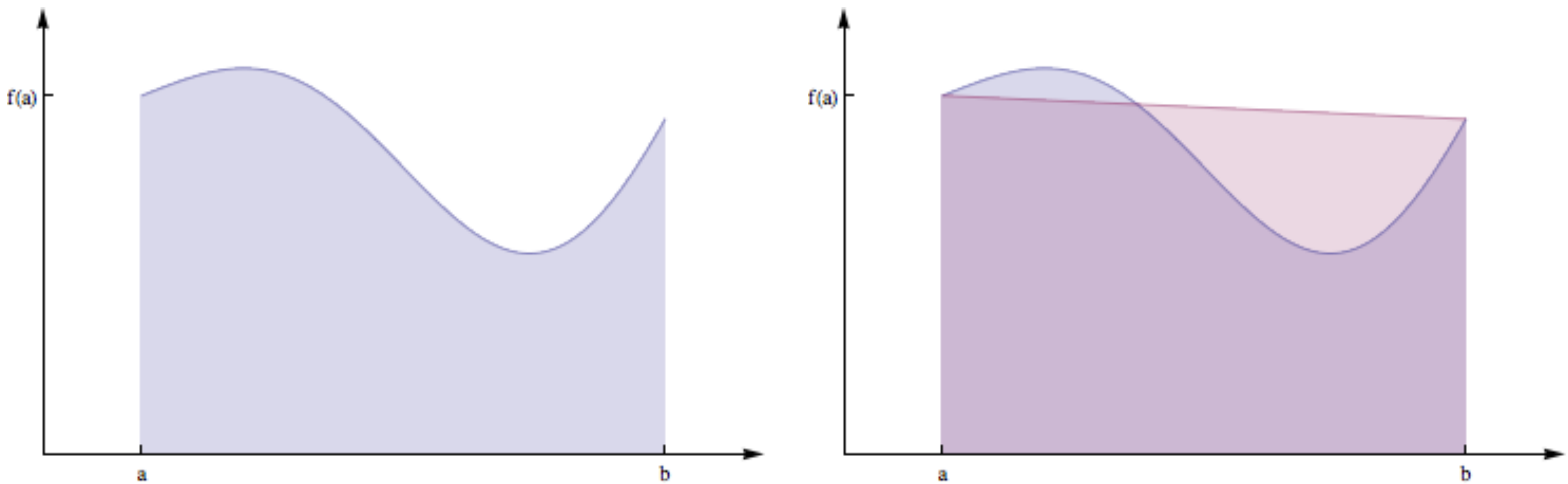
- Cálculo de integrais desempenha um papel importante em muitas aplicações, sendo necessário dispor de ferramentas para proceder ao respectivo cálculo.
- Sabemos que se a função for contínua no intervalo (limitado) de integração [a , b] o respectivo integral existe e pode ser calculado usando a ***fórmula de Barrow:***

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Em que F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$.

- **PROBLEMA:** Nem sempre é possível obter uma expressão da primitiva de f
- **SOLUÇÃO:** Calcular numericamente o valor do integral!

Método dos Trapézios



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_1(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) := T(f)$$

Exemplo

Usemos o método dos trapézios para estimar o valor do integral:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

$$T(f) = \frac{1-0}{2}(e^{0^2} + e^{1^2}) \approx 1.85914$$

Mas na verdade

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1.46265$$

Como é que podemos estimar o erro cometido ??

Erro de integração (Método dos trapézios)

$$E(f) = I(f) - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

$$\begin{aligned} E(f) =& I(f) - T(f) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_1(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - p_1(x))\,dx \\ &= \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-a)(x-b)\,dx = \frac{f''(c)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx \\ &= -\frac{f''(c)}{12}(b-a)^3 \end{aligned}$$

Como diminuir o erro ?

Depende de *f* (e do intervalo)

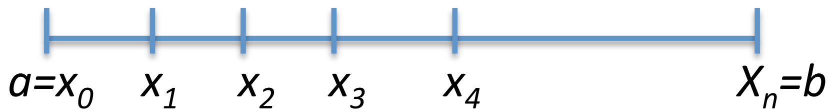
$$E(f) = -\frac{f''(c)}{12}(b-a)^3$$

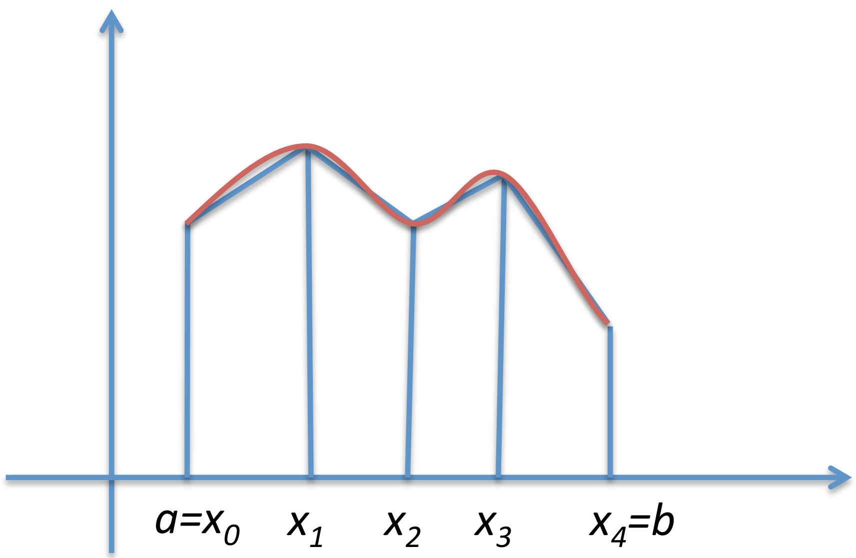
Depende apenas do intervalo [a , b]

Mesmo que a segunda derivada assuma valores elevados, se a magnitude do intervalo De integração diminuir, o erro diminui.

IDEIA: Subdividir o intervalo inicial e integração!

Fórmula dos trapézios composta





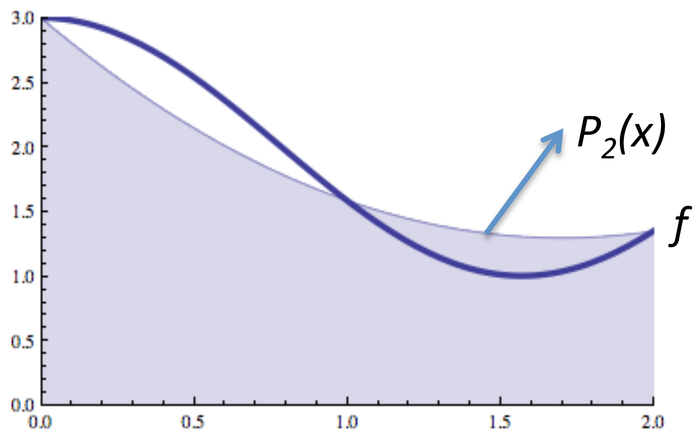
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Fórmula dos trapézios composta

$$
\begin{aligned}
T_C(f) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_1, i(x)\, dx \\
&= \frac{x_1 - x_0}{2}(f_0 + f_1) + \frac{x_2 - x_1}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + \frac{x_n - x_{n-1}}{2}(f_{n-1} + f_n) \\
&= h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right)
\end{aligned}
$$

$$
E_C^T(f) = I(f) - T_C(f) = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi)
$$

Regra de Simpson



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)\right)$$

$$\boxed{E_S(f) = I(f) - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]}$$

Método de Simpson Composto

$$S_C(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f_{2i} + 4\sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1}\right)$$

$$E_C^S(f) = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

Exemplo

- Construir uma tabela de valores da distribuição Normal *N(0,1)*, com os seguintes requisitos:
  - *Ter acesso a valores da distribuição normal para valores de x entre 0 e quatro, com um incremento de 0.01*
  - *Usar o método dos Trapézios e de Simpson*
  - *Ter garantia de 5 dígitos exactos em todos os elementos da tabela*