Instituto Superior de Economia e Gestão

MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ECONOMIA E FINANÇAS

Prova Modelo 19/12/2011

Todos os cálculos e gráficos efectuados no Mathematica / Matlab devem ser entregues numa *pen* no final da prova, assinalando claramente a pergunta a que dizem respeito. Devem também ser entregues todos os programas e rotinas auxiliares que forem utilizados.

I - Equações e sistemas de equações não lineares

Considere a equação não linear $x^4 + 0.55x - 1.55 = 0$.

(a) Localize graficamente as duas soluções reais desta equação, determinando intervalos de comprimento não superior a 0.5 que as contenham.

(b) Utilize o método da bicessão para calcular um valor aproximado da solução negativa da equação, com erro inferior a 0.5×10^{-6}, estimando previamente o número de iterações necessárias para atingir esse nível de precisão.

(c) Utilize o método de Newton para determinar uma aproximação da solução positiva da equação, partindo da aproximação inicial $x_0 = 2.0$. Sabendo que a solução exacta é $z = 1$, diga quantas iterações são necessárias para atingir um erro inferior a 0.5×10^{-12}.

II - Métodos para sistemas lineares

Considere o sistema linear, de n equações a n incógnitas, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, em que a matriz A é tridiagonal, com a estrutura seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Suponha que em vez do vetor $\boldsymbol{b}$ dispomos apenas de uma sua aproximação, digamos $\tilde{\boldsymbol{b}}$, afetado de um erro não superior a 10%. Sabendo que $\|A^{-1}\|_\infty \le 0.5$, discuta qual a da percentagem de erro que afectará a solução do sistema, mesmo que este seja resolvido de forma exata.

(b) Mostre que o método de Jacobi converge e, considerando $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1 \cdots 1)^T$, utilize-o para determinar a solução do sistema com erro inferior a 0.5×10^{-3}. (Se não conseguir determinar a priori o número de iterações a realizar, explicite pelo menos o critério de paragem utilizado)

III - Interpolação, Aproximação e Integração

Considere a seguinte tabela de valores de uma função f, suficientemente regular.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	0	85	102	102	100

(a) Determine o polinómio interpolador de f nos pontos da tabela e utilize-o para obter uma estimativa para $f(2.5)$.

(b) Estime $f(2.5)$ utilizando um polinómio de grau não superior a 1. Tendo em conta que $\max\limits_{2 \le x \le 3} |f'(x)| \le 3.5$ e que $\max\limits_{0 \le x \le 4} |f^{(5)}(x)| \le 14000$, discuta qual o método de estimação de $f(2.5)$ que lhe parece preferível.

(c) Determine o polinómio da forma $g(x) = a_0 + a_1 x$ que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados, utilizando-o para obter uma nova estimativa de $f(2.5)$.

(d) Determine um valor aproximado de $\int_0^4 f(x)\,dx$ usando os métodos dos trapézios e de Simpson compostos.

IV - Aplicação: Modelo de Crescimento de Verhulst

O modelo de crescimento de Verhulst, também conhecido por modelo de crescimento logístico, postula que a evolução do número de indivíduos de determinada população ao longo do tempo, $N(t)$, pode ser ser descrita pela equação diferencial

$$N'(t) = rN(t)(1 - N(t)/K),$$

em que r é a taxa de crescimento efectivo da população e K é a capacidade de suporte do meio.

(a) Utilize o método de Euler para determinar soluções numéricas do modelo logístico e verifique experimentalmente que, independentemente da condição inicial $N(0)$, a população tende para um número constante de K indivíduos.

(b) Considere uma população que no instante presente ($t = 0$ anos) é constituída por 1000 indivíduos e suponha que $K = 5000$. Se pretendermos que dentro de 10 anos a população não exceda os 2000 indivíduos, qual deverá ser a taxa de crescimento r ?