Instituto Superior de Economia e Gestão
MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ECONOMIA E FINANÇAS

Exame em Época Normal 09/01/2012

Tópicos de Resolução

I - Equações e sistemas de equações não lineares

Considere a equação não linear $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$.

(a) *Localize graficamente as soluções reais desta equação, determinando intervalos de comprimento não superior a 0.5 que as contenham.*

Fazendo o gráfico da função proposta no intervalo $[-2, 4]$ conseguimos identificar 3 raízes reais distintas. Tratando-se de um polinómio de grau 3, não poderá ter mais raízes, pelo que não existirão outras soluções da equação além das localizadas no intervalo $[-2, 4]$. Tratando-se de uma função contínua, podemos usar o teorema de Bolzano para localizar cada uma das raízes em intervalos de dimensão não superior a 0.5. De facto, como temos que

$$\begin{aligned} f(-1.75) \cdot f(-1.25) &= -\,4.33716 < 0 \\ f(0.5) \cdot f(1) &= -\,1.25 < 0 \\ f(2.75) \cdot f(3.25) &= -\,7.45728 < 0 \end{aligned}$$

podemos afirmar que as três soluções da equação z_1, z_2, z_3 verificam

$$z_1 \in]-1.75, -1.25[, \qquad z_2 \in]0.5, 1.0[, \qquad z_3 \in]2.75, 3.25[.$$

(b) *Utilize o método da bisseção para calcular um valor aproximado da solução negativa da equação, com erro inferior a 0.5×10^{-4}, estimando previamente o número de iterações necessárias para atingir esse nível de precisão.*

Se utilizarmos o método proposto realizando n bisseções do intervalo $]-1.75, -1.25[$ e tomarmos como solução o ponto médio do último intervalo considerado, o erro de aproximação é dado por

$$|x_n - z_1| \leq \frac{0.5}{2^{n+1}} = 2^{-n-2}$$

Se queremos garantir um erro inferior a 0.5×10^{-4}, temos que resolver a inequação $2^{-n-2} < 0.5 \times 10^{-4}$, o que nos leva a concluir que devemos considerar $n \geq 13$. A estimativa obtida é então $z_1 \approx -1.61801$.

(c) *Utilize o método de Newton para determinar uma aproximação da maior solução positiva da equação, partindo da aproximação inicial* $x_0 = 2.5$. *Sabendo que a solução exacta é* $z = 1$, *diga quantas iterações são necessárias para atingir um erro inferior a* 0.5×10^{-12}.

Usando a rotina construída nas aulas para o método de Newton, substituindo a condição de continuação das iterações por $|3 - x_n| > 10^{-12}$, garantimos que o algoritmo apenas pára depois de atingido o objectivo proposto. Neste caso foram realizadas 6 iterações:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2.500000000000 \\
x_1 &= 3.315789473684 \\
x_2 &= 3.048411778345 \\
x_3 &= 3.001423458944 \\
x_4 &= 3.000001287613 \\
x_5 &= 3.000000000001 \\
x_6 &= 3.000000000000
\end{aligned}
$$

(d) *Considerando a função iteradora* $g(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)/4$ *no intervalo* $[0, 1]$, *mostre que a menor solução positiva da equação pode ser determinada usando o método do ponto fixo. Através desse método determine essa solução com erro inferior a* 10^{-7}.

A equação inicialmente proposta é equivalente à equação $g(x) = x$, pelo que as soluções que procuramos são precisamente os pontos fixos da função g. Temos então que ver se g verifica as condições do teorema do ponto fixo no intervalo proposto. A função g é contínua em $\mathbb{R}$ e em particular será contínua no intervalo $[0, 1]$. Além disso, através de uma análise gráfica rapidamente concluímos que $g([0, 1]) = [0.5, 0.75] \subset [0, 1]$. Finalmente, através de uma análise gráfica de g', vemos que $|g'(x)| \leq 1/3 := L$ no intervalo $[0, 1]$, pelo que g é contractiva nesse intervalo. O teorema do ponto fixo garante então que o método converge para a solução $z_2 \in [0, 1]$, qualquer que seja a aproximação inicial considerada. Do ponto de vista do número de iterações necessárias para atingir o nível de precisão proposto, como sabemos que

$$|z_2 - x_n| \leq L^n |z - x_0|,$$

rapidamente concluímos que a para atingir a precisão proposta basta calcular 15 iterações. Aplicando o algoritmo com $x_0 = 0.5$, obtemos $z_2 \approx x_{15} = 0.61803397$.

II - Métodos para sistemas lineares

Considere o sistema linear, de 3 equações a 3 incógnitas, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

(a) *Seja $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a solução do sistema se considerarmos um segundo membro $\tilde{\boldsymbol{b}} = (101, 1.1, 0.2)$. Calcule o número de condição da matriz A na norma $\|\cdot\|_\infty$ e, sem resolver o sistema, estime a percentagem de erro cometida ao usar $\tilde{\boldsymbol{b}}$ em vez de $\boldsymbol{b}$.*

A matriz inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

pelo que $cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$. Assim, temos

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \leq cond_\infty(A) \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} = 6 \cdot \frac{1}{100},$$

pelo que o erro referido será certamente inferior ou igual a 6%.

(b) *Mostre que o método de Gauss-Seidel converge e utilize-o para calcular $\boldsymbol{x}$ e $\tilde{\boldsymbol{x}}$ com erro inferior a 0.5×10^{-8}. Calcule $\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty / \|\boldsymbol{x}\|_\infty$, compare com a estimativa obtida na alínea anterior e comente.*

No caso do método de Gauss-Seidel a matriz de iteração é dada por $C = -(L + D)^{-1}U$. Neste caso temos que

$$\|C\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_\infty = 3/4 < 1$$

Como $\|C\|_\infty < 1$ temos a garantia que o método de Gauss-Seidel converge, qualquer que seja a aproximação inicial. Aplicando o método aos dois sistemas propostos, vemos que

$$\boldsymbol{x} \approx (66.3333333, -32.5333333, -0.266666667),$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} \approx (66.9666667, -32.8166667, -0.233333333)$$

Deste modo podemos calcular

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = \frac{0.63333333}{66.333333} = 0.0095477387 \approx 1\%$$

A percentagem real de erro (1%) é bastante inferior à estimativa obtida na alínea anterior (6%), não havendo porém qualquer contradição já na alínea anterior apenas estabelecemos que o erro seria certamente inferior a 6%, o que é verdade. A majoração do erro obtida na alínea anterior, apesar de conservadora, é correcta.

III - Interpolação, Aproximação e Integração

Considere a seguinte tabela de valores de uma função f, suficientemente regular.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	3.0000	3.4496	0.827051	0.730592	2.33571

(a) *Determine o polinómio interpolador de f nos pontos da tabela e utilize-o para obter uma estimativa para $f(1.55)$.*

Os dados apresentados são interpolados pelo polinómio de grau 4 dado por

$$p_4(x) = -0.267615x^4 + 2.53873x^3 - 7.27896x^2 + 5.45744x + 3.$$

A nossa estimativa será então $f(1.55) \approx p_4(1.55) = 1.88058$.

(b) *Sabendo que as derivadas de f verificam a condição $f^{(n)}(x) \leq 2^n + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, determine um majorante para o erro cometido na alínea anterior.*

Da fórmula do erro de interpolação sabemos que

$$\begin{aligned} |f(1.55) - p_4(1.55)| &\leq \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(1.55)(1.55-1)(1.55-2)(1.55-3)(1.55-4) \right| \\ &\leq \frac{2^5+1}{5!} \cdot (-1.36283) = 0.374778 \end{aligned}$$

O erro cometido na alínea anterior é certamente inferior a 0.374778, o que significa que $f(1.55) \in]1.5058, 2.25535[$.

(c) *Determine o polinómio da forma $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados, utilizando-o para obter uma nova estimativa de $f(1.55)$.*

Aplicando o método dos mínimos quadrados com as funções de base $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = x^2$, concluímos, após resolver o correspondente sistema normal que $f(x) \approx 0.345509x^2 - 1.78679x + 3.56913$, pelo que a estimativa de mínimos quadrados para o valor de $f(1.55)$ é 1.62968. Note-se que esta estimativa também cai dentro do intervalo de confiança estabelecido na alínea anterior.

(d) *Determine um valor aproximado de $\int_0^4 f(x)\,dx$ usando os métodos dos trapézios e de Simpson compostos.*

Na aplicação dos referidos métodos apenas é relevante o valor da função f nos pontos da tabela. Isto quer dizer que do ponto de vista prático podemos chamar as rotinas elaboradas nas aulas usando o polinómio interpolador $p_4(x)$. As estimativas obtidas são as seguintes:

Método dos Trapézios: $\int_0^4 f(x)\,dx \approx 7.6751$.

Método de Simpson: $\int_0^4 f(x)\,dx \approx 7.90353$.

IV - Aplicação: Modelo de Crescimento de Verhulst Modificado

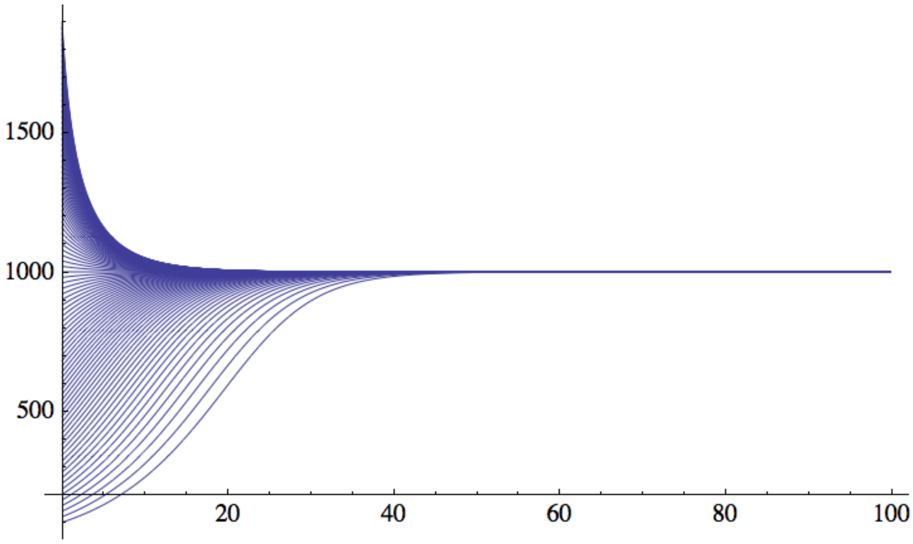
Segundo o modelo de Verhulst modificado, a evolução do número de indivíduos de determinada população ao longo do tempo, $N(t)$, pode ser ser descrita pela equação diferencial

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\alpha}\right),$$

em que r é a taxa de crescimento efectivo da população, K é a capacidade de suporte do meio e α é uma constante escolhida de modo a melhor ajustar os dados recolhidos.

(a) *Considere $\alpha = 2$ e utilize o método de Euler para determinar soluções numéricas do modelo de Verhulst modificado. Verifique experimentalmente que, independentemente da condição inicial $N(0) > 0$, a população tende para um número constante de K indivíduos.*

É natural que isto aconteça, uma vez que a diferença $(1-(N(t)/K)^2)$ é positiva se o número de indivíduos está abaixo da capacidade de suporte do meio e negativa no caso contrário. Assim, se a condição inicial for inferior a K, $N'(t)$ é positiva e $N(t)$ aumenta aproximando-se arbitrariamente de K, nunca o atingindo uma vez que a derivada vai diminuindo até tomar o valor 0, à medida que o número de indivíduos se aproxima de K. Se a condição inicial for exactamente K, a solução é constante e igual a K. Finalmente, se a condição inicial for superior a K, $N'(t)$ é negativa e $N(t)$ vai agora diminuindo até atingir, quando $t \to +\infty$, o valor K. Do ponto de vista experimental, podemos fixar $r = 0.1$ e $K = 1000$, já que o primeiro valor apenas determina se a convergência para K é mais lenta ou menos lenta e o valor de K é apenas uma questão de escala. No gráfico seguinte colocamos as trajectórias do sistema para várias condições iniciais. Observa-se uma certa assimetria que se traduz no facto de a convergência para K ser mais rápida quando iniciamos o processo acima da capacidade de suporte do meio.



(b) *Considere uma população que no instante presente ($t = 0$ anos) é constituída por 1000 indivíduos e suponha que $K = 5000$ e $r = 0.1$. Sabendo que dentro de 10 anos a população não excederá os 2000 indivíduos, qual poderá ser o valor máximo do parâmetro α ?*

Numa primeira aproximação, podemos simplesmente simular a situação descrita usando diversos valores de α para tentar perceber a dinâmica do sistema. Se começarmos com $\alpha = 0.5$ e formos considerando incrementos positivos, vemos que o aumento de α se traduz num crescimento mais rápido da população. Assim, rapidamente vemos que devemos ter $\alpha \in]0.9, 1[$. Se designarmos por $\psi(\alpha)$ o valor estimado pelo método e Euler para $N(10)$ para cada α, podemos determinar o valor de α aplicando o método da bisseção à função $\psi(\alpha) - 2000$. Deste modo obtemos $\alpha \approx 0.963$.