Matemática I – 2º Semestre 2011/12
Ficha de exercícios

Semanas 5 e 6 – Sistemas de Equações Lineares $n \times n$

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Utilize um determinante para calcular a área do paralelogramo definido pelos vectores:
a) $\vec{u} = (3, 0)$ e $\vec{v} = (2, 6)$;
b) $\vec{u} = (\alpha, \alpha)$ e $\vec{v} = (\beta, \beta)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.2. Utilize um determinante para calcular o volume do paralelipípedo definido pelos vectores:
a) $\vec{u} = (3, 0, 0)$, $\vec{v} = (2, 6, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 2)$;
b) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$;
c) $\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 2, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 2)$;
d) $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{w} = (0, 0, 1, 0)$ e $\vec{s} = (0, 0, 1, 0)$.

1.3. Use a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas de equações e em seguida verifique as soluções encontradas:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 5z = 14 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \end{cases}$.

1.4. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, tal que $|A| = k$ com $k \in \mathbb{R}$. Indique, justificando, o valor dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; c) $\left| 3 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right|$;

d) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.5. O valor de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x & y \\ 2 & 1 & y & x \end{vmatrix}$ é igual a:

a) $-x^2 + y^2 + x + y$ b) $x^2 + y^2 + x - y$
c) $x^2 - y^2 - x - y$ d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

1.6. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 16.5: Exercício 2.

1.7. Sejam as matrizes M, P, Q, X quadradas, com M invertível. A solução da equação $XM + P = Q$ é $X = M^{-1}(Q - P)$: verdadeiro ou falso? Justifique a resposta.

1.8. Determine a inversa das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$, com $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1.9. Prove que a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Demonstre que se uma matriz quadrada tiver uma linha ou uma coluna nula, então o seu determinante é 0.

2.2. Seja M uma matriz triangular superior de ordem 4.

a) Demonstre que o determinante de M é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de M.

b) Demonstre que o resultado da alínea anterior também é verdadeiro para uma matriz triangular inferior de ordem 4.

2.3. Uma matriz M quadrada diz-se *ortogonal* se $M'M = I$, onde I é a matriz identidade. Demonstre que:
a) O produto de duas matrizes ortogonais $n \times n$ é uma matriz ortogonal.
b) O determinante de uma matriz ortogonal é sempre $+1$ ou -1.

2.4. Sem calcular os determinantes, demonstre que: $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2$.

2.5. Mostre que se uma matriz $A_{n\times n}$ for invertível então $|A| \neq 0$.

2.6. Demonstre que a inversa de uma matriz, quando existe, é única.

2.7. Sejam A e B matrizes invertíveis e $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Demonstre as seguintes propriedades:
a) $(A^{-1})^{-1} = A$;
b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
c) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

3 Problemas e Modelização

3.1. Uma empresa da industria alimentar produz diariamente farinha de trigo, farinha de centeio e farinha de milho. A produção total da empresa é de k toneladas por dia. Sabendo que a produção diária conjunta de farinha de trigo e de centeio é o triplo da produção de farinha de milho, e que a produção diária conjunta de farinha de trigo e de milho é o dobro da produção de farinha de centeio.

a) Utilize a regra de Cramer para determinar a fracção de k que corresponde à produção diária de farinha de trigo.

b) Utilizando o cálculo da matriz inversa, determine a fracção da produção afecta a cada um dos tipos de farinha.

3.2. Considere o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x+z &= a \\ y+az &= 0 \\ x+(a+1)\,z &= a+b \end{cases}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Utilize a regra de Cramer para encontrar os valores de a e b para os quais este sistema é possível e determinado. O que podemos concluir sobre o sistema para os restantes valores de a e b?

b) Determine as soluções do sistema no caso $a = 1$ e $b = 1$ utilizando a regra de Cramer.

3.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 16.1: Exercícios 6 e 7.

3.4. Mostre que os vectores $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ e $\vec{c} = (1, 0, 1)$ são linearmente independentes:
a) utilizando a definição de independência linear;
b) estudando a característica de uma matriz;
c) calculando o determinante de uma matriz;
d) determinando se uma matriz é invertível.

3.5. Retomando o problema 3.1 da semana 2/3: mostre que a matriz $R(-\theta)$ é a inversa da matriz $R(\theta)$. Comente este resultado do ponto de vista geométrico.

4 Exercícios adicionais

4.1. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n tais que $|A| = k$ e $|B| = q$, com $kq \neq 0$. O determinante de $C = qkAB$ é igual a:

a) $(qk)^n$ b) $(qk)^{n+1}$ c) $(qk)^2$ d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4.2. Considere o seguinte sistema de equações lineares: $\begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Determine o valor de k para o qual a distância entre as colunas 1 e 2 da matriz dos coeficientes do sistema é igual a $2\sqrt{2}$.

b) Considere o caso $k = 0$ e verifique a desigualdade triangular para as distâncias entre as colunas da matriz dos coeficientes do sistema.

c) Considere o caso $k = 1$ e use a regra de Cramer para determinar o valor de y.

4.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 16.3: Exercícios 1 e 2;
Secção 16.4: Exercícios 1 a 8;
Secção 16.5: Exercício 1.

4.4. Seja A uma matriz simétrica e invertível de ordem n tal que $X'A = B + A$. Então:

a) $X = B'A^{-1} + I$ b) $X = A^{-1}B' + I$ c) $X = \left(\frac{B+A}{A}\right)'$

d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4.5. Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem n. Sabendo que: $|A + B| = 3$, $|C| = 2$ e $(AX + BX)' = C$, obtenha X (em função de A, B e C) e calcule o seu determinante.

4.6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$.

a) Mostre que o determinante de A é igual a: $-\left(1 - x^2\right)^2$.
b) Indique os valores de x para os quais a matriz A não tem inversa.

4.7. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 16.6: Exercícios 2 a 6;
Secção 16.7: Exercícios 2 e 5.