Matemática I – 2º Semestre 2011/12
Ficha de exercícios

Semana 1 – Vectores

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Sejam os vectores de $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$. Represente estes vectores no plano e determine geometricamente: a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 3\vec{v}$ d) $||\vec{u}||$ e) $d(\vec{u}, \vec{v})$.

1.2. Resolva analiticamente as alíneas do exercício anterior e compare com os resultados obtidos geometricamente.

1.3. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (a, 1 + a, 2a), \vec{v} = (1, 1, 3)$ e $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo a obter o vector $\vec{u}$ como combinação linear dos vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

1.4. Indique dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de igual dimensão, e uma combinação linear dos dois vectores.

1.5. Os vectores $\vec{u} = (-1,\ -1,\ -a,\ -1)$ e $\vec{v} = (a + 2,\ a,\ a,\ a)$, com $a \in \mathbb{R}$, são ortogonais se e só se:

a) $a = 2$ b) $a = 0$ c) $a = -2$ ou $a = -1$ d) $a = 1$.

1.6. Calcule a distância $d(\vec{u}, \vec{v})$ para os vectores do exercício 1.5 (com $a \in \mathbb{R}$).

1.7. Averigue se os seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes

a) $\{(1, 2, 3), (0, 1, 1), (2, 7, 7)\}$,

b) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, -1)\}$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, demonstre as seguintes propriedades do produto escalar:
a) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
b) $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

2.2. Indique a distância $d(\vec{u}, \vec{v})$ entre dois vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

2.3. Demonstre que $||\vec{u}\,|| > 0$ para qualquer $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$.

2.4. Defina combinação linear de vectores.

2.5. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Mostre que os vectores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{w}$ e $\vec{v}+\vec{w}$ formam igualmente um conjunto de vectores linearmente independentes.

3 Problemas e Modelização

3.1. Imagine os seguintes índices económicos, sem unidades:

País	Produtividade	Competitividade	Crescimento económico
Portugal	3	2	-1
Canadá	8	5	0
Tailândia	1	1	-3

a) Qual o país mais próximo de Portugal no conjunto destes três índices?
b) Neste modelo, o conjunto dos índices portugueses depende linearmente dos indices dos outros dois países?

3.2. Tendo em conta as seguintes notas e os respectivos pesos:

Disciplina	Peso	Notas do João	Notas da Leonor
Matemática	3/10	?	15
Contabilidade	3/10	18	12
Direito	3/10	10	14
Inglês	1/10	16	15

a) Calcule a nota média destes alunos utilizando o produto escalar de vectores.
b) Qual a nota que o João precisa de obter a Matemática para igualar a média da Leonor?

4 Exercícios adicionais

4.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 15.7: Exercícios 1 a 8;
Secção 15.8: Exercícios 1 a 6.

4.2. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, demonstre a desigualdade triangular: $||\vec{u} + \vec{v}\,|| \leq ||\vec{u}\,|| + ||\vec{v}\,||$.
(Sugestão: desenvolva $||\vec{u} + \vec{v}\,||^2$ e utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz.)