

Instituto Superior de Economia e Gestão

Análise Matemática II

Licenciatura em MAEG

Lista de Exercícios

Ano lectivo 2011-2012 (2º Semestre)

1 Séries de termos reais

Exercício 1.1 Determine que valores de x tornam as séries seguintes convergentes e calcule a sua soma.

$$a) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x}{x+1} \right)^n \quad b) \sum_{n \geq 0} (1 - |x|)^n$$

$$c) \sum_{n \geq 0} x \quad d) \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^2 + n}.$$

Exercício 1.2 Utilize a teoria das séries geométricas para calcular os racionais correspondentes às dízimas infinitas periódicas:

$$a) 3,66666(6) \quad b) 1,1818(18) \quad c) 1,0108(08)$$

$$d) 1,123(123) \quad e) 0,99999(9).$$

Exercício 1.3 Calcule a soma das seguintes séries:

$$a) \sum_{n \geq 0} 3^{-(5n+1)} \quad b) \sum_{n \geq 2} \frac{2^n + 3^n}{6^n} \quad c) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$d) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} \quad e) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{3}{2^n} \right)$$

Exercício 1.4 Prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existir e for finito, então a série $\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n+k})$ é convergente e a sua soma é $a_1 + a_2 + \dots + a_k - k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Exercício 1.5 Determine a natureza das seguintes séries e a soma das que são convergentes:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \quad b) \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^2 - 4} \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+k)}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$d) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}} \quad e) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}.$$

Exercício 1.6 Mostre que se $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, e $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, então $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$ é divergente.

Exercício 1.7 Sendo a_n uma sucessão real tal que $a_n \rightarrow +\infty$, indique, justificando, a natureza da série $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$.

Exercício 1.8 Estude, utilizando o critério de comparação ou um dos seus corolários, a natureza das seguintes séries:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n \geq 2} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3 - 1} & b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}} & c) \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} \\
 d) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3 + (-1)^n} \right)^n & e) \sum_{n \geq 1} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} & f) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 1} \\
 g) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\log n} & h) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^4 - 3n^2 - 1} & i) \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-1/n}}{n^k} \\
 j) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n\sqrt{n}} e^n & k) \sum_{n \geq 1} \left(n \cdot \operatorname{sen} \frac{2}{n} \right)^{2n} & l) \sum_{n \geq 1} n^2 \left(\frac{2}{3} \right)^n \\
 m) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+1}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{n+1} \right)^n & n) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{2n+3} \right)^{n\sqrt{n}} & o) \sum_{n \geq 1} \left(n \operatorname{sen} \frac{k}{n} \right)^{2n} \text{ com } |k| \neq 1 \\
 p) \sum_{n \geq 1} e^{-n} (\log n)^n & q) \sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n} e^{-n} & r) \sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \\
 s) \sum_{n \geq 1} \frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)^3 \sqrt[3]{n^2+n}} & t) \sum_{n \geq 1} (n - \sqrt{n^2-1}) & u) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \left(\frac{9}{8} \right)^n \\
 v) \sum_{n \geq 1} n! \left(\frac{3}{4} \right)^{n^2} & w) \sum_{n \geq 1} n \frac{1}{(a^2+2)^n} & x) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(\frac{10}{9} \right)^{n^2}.
 \end{array}$$

Exercício 1.9 Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes de termos positivos. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

$$a) \sum \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) \quad b) \sum \frac{n+1}{n} a_n.$$

Exercício 1.10 Estude, quanto à natureza, a série de termo geral $\frac{a^n}{1+b^n}$ nos seguintes casos:

- $0 < a < b$
- $0 < b \leq a < 1$
- $1 \leq b \leq a$.

Exercício 1.11 Sejam a_n e b_n duas sucessões de termos positivos tais que a série $\sum a_n$ e a série $\sum (b_n - b_{n+1})$ são convergentes. Mostre que a série $\sum (a_n b_n)$ é uma série convergente.

Exercício 1.12 Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as seguintes séries:

$$\begin{aligned}
 a) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} & \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (n^2 + 1)}{n^2 + n + 3} & \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{n^2 \sqrt{n}} & \quad d) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n + 1)!} \\
 e) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{6n - 5} & \quad f) \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left(\frac{2n + 1}{3n + 1} \right)^n & \quad g) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \log n}{n}.
 \end{aligned}$$

Exercício 1.13 Considere a série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n + 1)^2}$.

- a) Justifique que se trata de uma série convergente e calcule a soma da série com um erro inferior a 0,01.
- b) Indique um majorante do erro que comete quando aproxima a soma da série pela soma dos 3 primeiros termos.

Exercício 1.14 Seja a_n uma sucessão tal que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Prove que a série $\sum a_n^2$ também o é. Dê um exemplo que mostre que o recíproco não é verdadeiro.

Exercício 1.15 Determine os intervalos de convergência das seguintes séries de potências:

$$\begin{aligned}
 a) \sum_{n \geq 1} (n + 1)^{-1/2} (x + 1)^n & \quad b) \sum_{n \geq 1} n (x - 2)^{n-1} & \quad c) \sum_{n \geq 1} \binom{n+4}{5} x^{4n} \\
 d) \sum_{n \geq 1} \frac{1.3 \dots (2n + 1)}{2.4 \dots (2n + 2)} \frac{1}{n + 1} (x - 1)^n.
 \end{aligned}$$

Exercício 1.16 Calcule as somas das seguintes séries nos respectivos intervalos de convergência:

$$\begin{aligned}
 a) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} & \quad b) \sum_{n \geq 1} n x^n & \quad c) \sum_{n \geq 1} n^2 x^n \\
 d) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n + 1} (x - 1)^{2n+1} & \quad e) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n + 1)} (x - 1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Exercício 1.17 Desenvolva a função $\log x$ em série de potências de $x - 2$, indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.

Exercício 1.18 Desenvolva a função $\frac{1}{x^2}$ em série de potências de $x + 1$, indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.

Exercício 1.19 Considere a função $f(x) = e^x$.

- a) Calcule a sua série de MacLaurin e prove que a função é soma da sua série de Mac-Laurin para todo o $x \in \mathbb{R}$.
- b) Com base na alínea anterior prove que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exercício 1.20 Escreva o desenvolvimento de MacLaurin das seguintes funções:

a) $f(x) = a^x$, $a > 0$ b) $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$ c) $f(x) = \cos x$.

Exercício 1.21 Desenvolva em série de MacLaurin a função $x \log(1 + x^3)$ e justifique que a função tem um mínimo no ponto $x = 0$.

Exercício 1.22 Desenvolva em série de potências de $x - 1$, a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 \log(x^2)$, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.

Exercício 1.23 Desenvolva em série de potências de $x - 2$ a função $\frac{4}{3x}$, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Utilize o resultado obtido para determinar o valor de $f^{(17)}(2)$.

Exercício 1.24 Desenvolva em série de MacLaurin a função $2^x + \frac{1}{2+x}$ e indique, justificando, o intervalo de convergência da série obtida.

Exercício 1.25 Calcule o polinômio de Taylor de grau 2 da função $f(x) = \int_1^{u(x)} \ln t \, dt$ no ponto $x = 2$, sabendo que a função $u(x)$ é de classe $C^2(\mathbb{R})$, tem por contradomínio o conjunto $[1, +\infty)$ e $u(2) = 1$.

Exercício 1.26 Utilize a fórmula de MacLaurin para provar a fórmula do Binômio de Newton,

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

2 Noções Topológicas e Sucessões em \mathbb{R}^n

Exercício 2.1 Considere o conjunto $C([0, 1])$ das funções contínuas no intervalo $[0, 1]$. Defina para $f, g \in C([0, 1])$,

$$d^*(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Mostre que $d^*(f, g)$ define uma distância em $C([0, 1])$.

Exercício 2.2 Considere o conjunto E um conjunto qualquer e defina para $x, y \in E$,

$$d^*(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

(a) Mostre que $d^*(x, y)$ é uma distância.

(b) Defina a bola de centro em $a \in E$ e de raio ε .

Exercício 2.3 Considere em \mathbb{R}^n as seguintes aplicações

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

(a) Mostre que todas estas aplicações definem normas em \mathbb{R}^n .

(b) Para cada uma das normas consideradas calcule $d(x, y) = \|x - y\|$.

(c) Interprete geometricamente as distâncias calculadas.

Exercício 2.4 Represente geometricamente os seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 e defina analiticamente o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada um deles:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \leq 2 \text{ e } xy \geq 0\}$

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$

(c) $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq y + x \leq 1 \right\}$

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \text{ e } y > 0\} \setminus \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 1 \text{ e } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Exercício 2.5 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Prove que

(a) A é um conjunto aberto se e só se $A \cap \text{front}A = \emptyset$.

(b) A é um conjunto aberto se e só se $\mathbb{R}^n \setminus A$ é um conjunto fechado.

(c) Prove, utilizando o resultado anterior, que a intersecção de conjuntos fechados é sempre um conjunto fechado.

Exercício 2.6 Considere o seguinte conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$.

- (a) Dê um exemplo de uma sucessão de pontos que pertença a X que convirja para um ponto que não pertence a X .
- (b) Poderá encontrar uma sucessão de pontos que não pertencem a X convergente para um ponto de X ? Justifique.

Exercício 2.7 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - \ln(x^2 + y^2)} + \sqrt{x - y}.$$

Determine o domínio de f , D_f , represente-o geometricamente e diga, justificando, se D_f é um conjunto aberto e/ou fechado.

Exercício 2.8 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{(1 - x)(1 - y)}.$$

- (a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- (b) Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f .
- (c) D_f é um conjunto aberto? E fechado? Justifique.

Exercício 2.9 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - (y + 1)^2)}.$$

- (a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- (b) Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f .
- (c) D_f é um conjunto compacto? Justifique.

Exercício 2.10 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(1 - \operatorname{sen} x)(y - x^2)}}{\ln(x + y - 2)}.$$

- (a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- (b) Defina analiticamente a fronteira de D_f .
- (c) D_f é um conjunto aberto? E fechado? Justifique.

Exercício 2.11 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \sqrt{(x - 2)(16 - x^2 - y^2)}.$$

(a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.

(b) Indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.

Exercício 2.12 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \ln(xy) \sqrt{(1 - x^2 - (y - 1)^2)}.$$

(a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.

(b) Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.

3 Limites e continuidade em \mathbb{R}^n

Exercício 3.1 Calcule ou prove que não existem os limites das seguintes funções nos pontos indicados:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x-1}{y-x+1}$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y^2}{x-y}$$

$$d) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,0)} \frac{x+y-2}{xyz}$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$$

$$f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^3+y-1}{3x^3+y^3-1}$$

$$g) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$$

$$h) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,1)} \frac{y^2}{x} (z+3) \operatorname{sen}(4x)$$

$$i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5}{x^4+2y^2}$$

$$j) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{\operatorname{sen}(\log(x+y))}$$

$$k) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2-y^2-1}{x-1}$$

$$l) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2\sqrt{|y-1|}}{x^2+(y-1)^2}$$

$$m) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,0)} \frac{z+(x-1)z+z^2}{1-xy+zx}$$

Exercício 3.2 Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = (x^2 + y) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$.

(a) Justifique que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ e não existe $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$.

(b) Prove que existe limite da função no ponto $(0, 0)$ e conclua que pode existir limite de uma função num ponto sem que existam os limites iterados.

Exercício 3.3 Estude a continuidade das seguintes funções nos pontos indicados:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{no ponto } (0, 0).$$

$$b) g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y^2}{(x-1)^2 + y^2} + y & \text{se } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 0) \end{cases} \quad \text{no ponto } (1, 0).$$

$$c) h(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{no ponto } (0, 0).$$

Exercício 3.4 Determine o valor do parâmetro real α de modo que a seguinte função tenha limite no ponto $(1, 1)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x + y} + \alpha & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } y \neq x \\ \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} - \alpha & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício 3.5 Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = \frac{x^2}{x + y}$.

- (a) Para cada $m \in \mathbb{R}$ e cada $k \in \mathbb{N}$ seja $A_{k,m} = \{(x, y) \in D_f : y = mx^k\}$. Calcule para cada par (k, m) o limite de f no ponto $(0, 0)$ relativo ao conjunto $A_{k,m}$.
- (b) Considere o conjunto $X = \{(x, y) \in D_f : y = -x + x^2\}$ e calcule o limite de f no ponto $(0, 0)$ relativo ao conjunto X .
- (c) Que pode concluir sobre a existência de limite de f no ponto $(0, 0)$?

Exercício 3.6 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} k + \exp\left(-\frac{1}{|x^2 + y^2 - 4|}\right) & \text{se } x^2 + y^2 \geq 4 \\ 5 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}.$$

Determine o valor de k de modo a que a função seja contínua em \mathbb{R}^2 .

Exercício 3.7 Verifique se as seguintes funções são prolongáveis por continuidade a \mathbb{R}^2 :

$$(a) f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

$$(b) f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(c) f(x, y) = \frac{x - y}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}}$$

$$(d) f(x, y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

Exercício 3.8 Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$. A função pode ser prolongável por continuidade a \mathbb{R}^2 ? Em caso afirmativo determine o prolongamento contínuo de f .

Exercício 3.9 Determine os pontos de descontinuidade das funções assim definidas:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ 1 + y & \text{se } x = 0 \\ y & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad b) f(x, y) = (y^2 - 4y + 3) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercício 3.10 Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt{\frac{x(2 - \operatorname{sen} x)}{1 - |y|}}$.

- (a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- (b) Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto e/ou fechado.
- (c) Justifique se f é prolongável por continuidade ao ponto $(0, 1)$.

4 Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n

Exercício 4.1 Calcule as funções derivadas parciais de 1ª ordem para as seguintes funções, indicando o respectivo domínio:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(xy)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ y^2 - y & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} x^2 - yx & \text{se } x \neq y \\ x & \text{se } x = y \end{cases}$$

Exercício 4.2 Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verifique que a função tem derivadas parciais em todo o seu domínio mas não é contínua na origem.

Exercício 4.3 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } xy \neq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(b) Prove que não existe $f'_v(0, 0)$, qualquer que seja o vector $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $v_1 v_2 \neq 0$.

(c) O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f no ponto $(0, 0)$?

Exercício 4.4 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f em \mathbb{R}^2 .

(b) Mostre que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Utilize a alínea anterior para provar que $f'_v(0, 0) = f(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

(d) Utilize a alínea anterior para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(e) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0, 0)$.

Exercício 4.5 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - x^3 y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Estude a continuidade de f em \mathbb{R}^2 .
- (b) Calcule o gradiente de f no ponto $(1, 1)$.
- (c) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0, 0)$.

Exercício 4.6 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ e mostre que são descontínuas em $(0, 0)$.
- (c) Verifique que f é diferenciável na origem.

Exercício 4.7 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x - y)}{x + y} & \text{se } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x + y = 0. \end{cases}$$

- (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- (b) Existe $\frac{\partial f}{\partial x}$ nos pontos da forma $(a, -a)$ com $a \neq 0$?
- (c) Calcule a função derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ e estude a sua continuidade.
- (d) Calcule $f'_{(1, -1)}(2, 3)$.
- (e) Estude a continuidade de f em \mathbb{R}^2 .
- (f) Estude a diferenciabilidade de f em \mathbb{R}^2 .
- (g) Calcule $\nabla f(1, 0)$.
- (h) Calcule $f'_{(1, 1)}(0, 0)$ e $f'_{(1, 1)}(1, 0)$.

Exercício 4.8 Calcule a segunda diferencial de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ no ponto $(1, 1)$.

Exercício 4.9 Seja h uma função diferenciável em \mathbb{R} e considere a função f definida por $f(x, y) = tg(x)h(x + \cos y)$. Mostre que para todo o ponto $(x, y) \in D_f$, se tem

$$\operatorname{sen} y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}.$$

Exercício 4.10 Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ e considere a função g definida por $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Mostre que para todo o ponto $(x, y) \in D_g$, se tem

$$x \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y).$$

Exercício 4.11 Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R} e considere a função g definida por $g(x, y) = \cos^2 x \cdot f(y + tgx)$. Prove que para todo o ponto $(x, y) \in D_g$, se tem

$$\frac{1}{\cos^2 x} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2tgx \cdot g(x, y).$$

Exercício 4.12 Usando a regra da derivada da função composta, calcule $\frac{dw}{dt}$ sabendo que

$$w = xyf(z), x = t^2, y = e^t, z = \ln t^2,$$

e f é uma função real de variável real diferenciável.

Exercício 4.13 Seja F uma função real de variável real diferenciável e $z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$. Mostre que para todo o $x \neq 0$, se tem

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

Exercício 4.14 Sejam $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2 e $z = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Exercício 4.15 Seja $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^1 e $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $v(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$. Mostre que $\phi = u \circ v$ é tal que

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Exercício 4.16 Considere as funções, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y, z) = (e^{x^2+y^2+z^2}, 1 - xyz^2)$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função cuja matriz jacobiana no ponto $(e^3, 2)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(1, -1, 1)$.

Exercício 4.17 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$. Considere $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y, z) = (f(x^2) + f(x^2 + y^2), f(xyz))$.

(a) Calcule a matriz jacobiana de g .

(b) Sendo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = e^{3-x^2+yx}$, justifique que $h \circ g$ é diferenciável no ponto $(1, 1, 2)$ e calcule a matriz jacobiana de $h \circ g$ nesse ponto.

Exercício 4.18 Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{5/3}y^2}{(x^2 + y^2)^{4/3}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

e seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(t) = (t, t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere ainda a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(t) = (f \circ g)(t) = f(t, t)$.

(a) Indique o valor de $F(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

(b) Calcule o valor de $F'(0)$: i) utilizando a expressão de $F(t)$ obtida na alínea anterior; ii) através da regra da derivação da função composta.

(c) O que pode concluir do facto de ter obtido diferentes resultados nas alíneas i) e ii)?

Exercício 4.19 Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 para a função $f(x, y) = \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$ no ponto $(0, 0)$ com resto de Lagrange.

Exercício 4.20 Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 para a função $f(x, y) = \frac{y}{y+x}$ no ponto $(1, 0)$ com resto de Lagrange.

Exercício 4.21 Determine os extremantes e correspondentes extremos das funções:

a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^y$ b) $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$

c) $f(x, y, z) = xy + xz$ d) $f(x, y) = x\operatorname{sen}y$

e) $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$

Exercício 4.22 Averigue se o ponto $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ é extremante da função $f(x, y, z) = x^2 + 2xy^2 + y^4 + z^2$.

Exercício 4.23 Determine, em função de β , os extremantes da função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = xy + xz - x^3 - y^2 - \beta x$.

Exercício 4.24 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = e^{xy+xy^2+x^2}$. Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

Exercício 4.25 Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$.

(a) Prove que os pontos críticos de f são $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(0, 0)$.

(b) Indique, justificando, se os pontos $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ são extremantes da função f e, caso sejam, determine os respectivos valores extremos.

(c) Prove que o ponto $(0, 0)$ não é extremante da função f .

5 Análise Complexa

Exercício 5.1 Determine 2 números complexos cuja soma seja 4 e cujo produto seja 8.

Exercício 5.2 Calcule:

$$\begin{aligned} a) (1-i)^2(2+i) & \quad b) \overline{1+i} \cdot (2-i) & \quad c) \frac{i}{2+2i} \\ c) \left| \frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(3-4i)} \right| & \quad d) \frac{|1+i|(1+2i)}{1-i} & \quad e) (1-\frac{i}{2})^2 \end{aligned}$$

Exercício 5.3 Resolva em \mathbb{C} as seguintes equações

$$\begin{aligned} a) z^3 + 2z = 0 & \quad b) z^3 + iz^2 - iz + 1 = 0 \\ c) z^7 + z^4 - 16z^3 - 16 = 0 & \quad d) z^2 + 2z + 3 = 0 \end{aligned}$$

Exercício 5.4 Prove que se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z| = 2$, então $\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \leq \frac{1}{3}$.

Exercício 5.5 Dados $z_1, z_2 \neq 0$ em \mathbb{C} , prove que $Re(z_1 z_2) = |z_1||z_2|$ se e só se $arg(z_1) - arg(z_2) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 5.6 Mostre que para qualquer número complexo z se tem $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)| \leq \sqrt{2}|z|$. Indique exemplos de números complexos que verifiquem cada uma das igualdades.

Exercício 5.7 Mostre que para qualquer número complexo $z \neq 0$ se tem $Re(z) > 0 \Leftrightarrow Re(1/z) > 0$.

Exercício 5.8 Escreva na forma trigonométrica cada um dos seguintes números complexos:

$$a) \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} \quad b) (\cos \frac{1}{2} - i \sin \frac{1}{2})^2 \quad c) (1+i)^7$$

Exercício 5.9 Prove que:

$$a) (-1+i)^7 = -8(1+i) \quad b) (1+\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+\sqrt{3}i)$$

Exercício 5.10 Mostre que se $z \neq 1$ se tem $1+z+\dots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

Exercício 5.11 Represente graficamente os seguintes subconjuntos de \mathbb{C} e defina analiticamente o seu interior, fronteira e aderência. Refira também se são abertos, fechados, limitados e conexos.

$$\begin{aligned} a) \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 16\} & \quad b) \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 4\} \\ c) z \in \mathbb{C} : |z+1| > |z-1+i| & \quad d) \{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| + |Im(z)| \leq 1\} \\ e) z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, |arg(z)| < \frac{\pi}{4} & \quad f) \{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) > 0\} \end{aligned}$$

Exercício 5.12 Estude quanto à sua natureza as seguintes sucessões de números complexos, indicando o limite das que forem convergentes.

$$a) z_n = (-1)^n + \frac{i}{n} \quad b) z_n = \frac{n + i(n+1)}{2n+2}$$

$$c) z_n = \frac{2^n}{n!} + i \frac{n}{2^n} \quad d) z_n = i^n$$

Exercício 5.13 Determine os valores de z para os quais existem os limites seguintes:

$$a) \lim \frac{z^n}{n!} \quad b) \lim \left(\frac{z}{n}\right)^n \quad c) \lim z^n$$

Exercício 5.14 Mostre que se as séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$ forem absolutamente convergente, então a série $\sum(x_n + iy_n)$ também é absolutamente convergente.

Exercício 5.15 Mostre que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ é convergente se e só se $|z| < 1$ e que nesse caso a soma da série é dada por $1/(1-z)$.

Exercício 5.16 Estude quanto à convergência simples e absoluta as séries seguintes:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+i}{(n-1)!} \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{2n^2}$$

$$c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+i}{2^n} \quad d) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}\right)$$

Exercício 5.17 Calcule, considerando quando necessário o ramo principal da função logaritmo.

$$a) e^{1-i} \quad b) \log(2i+2) \quad c) \log(-1)$$

$$c) 5^{i+1} \quad d) (\sqrt{3})^i \quad e) (1+i)(1-i)$$

$$f) \cos(i) \quad g) \sin(2i+1) \quad h) \tan(-\pi i)$$

$$i) \arccos(i)$$

Exercício 5.18 Determine a parte real e imaginária das funções:

$$a) f(z) = z^2 + 3z - 2i \quad b) f(z) = \frac{z+2}{z-1} \quad c) f(z) = 3i\bar{z} + 4(i+z).$$

Exercício 5.19 Resolva em \mathbb{C} as seguintes equações:

$$a) e^z = 1+i \quad b) e^z = -1 \quad c) \cos(z) = 2 \quad d) e^z = e^{iz}$$

Exercício 5.20 Considerando que $z = x + iy$, calcule os seguintes limites:

$$a) \lim_{z \rightarrow -1+2i} (3xy + i(x-y)^2) \quad b) \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2-5}{iz} \quad c) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z(z^2+1)}{z-i}$$

Exercício 5.21 Mostre que f é contínua em z_0 se e só se \bar{f} é contínua em z_0 .

Exercício 5.22 Use o resultado do exercício anterior para concluir que se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua num certo ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, também os são as funções $Re(f)$, $Im(f)$ e $|f|$.

Exercício 5.23 Determine o maior subconjunto de \mathbb{C} onde as seguintes funções são contínuas:

$$a) f(z) = \log(z + 1 - i) \quad b) f(z) = \sqrt{z^2 + 1} \quad c) f(z) = \frac{e^{z+1}}{z^2 + z + 1}$$

Exercício 5.24 Determine o maior subconjunto de \mathbb{C} onde as seguintes funções são diferenciáveis

$$a) f(x+iy) = -(e^y - e^{-y})\cos x + i(e^y + e^{-y})\sin x \quad b) f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad c) \log_0(z+1)$$

Exercício 5.25 Determine $u(x, y)$ de modo que $f(x + iy) = u(x, y) + i(x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2)$ seja holomorfa em \mathbb{C} e $f(0) = 0$.

Exercício 5.26 Sejam $u_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (n \in \mathbb{N}_0)$ definidas por $u(x, y) = x^k - y^k$. Calcule os valores de k para os quais existem funções f_k holomorfas tais que $\operatorname{Re}(f_k) = u_k$ e determine-as.

Exercício 5.27 Determine as funções harmônicas conjugadas de $w(x, y) = x^2 - 3x - y^2$.