Estatística MAEG 2011/12
Exercícios Capítulo 1

1. Em determinada universidade, verifica-se que 30% dos alunos possuem carro. Selecciona-se uma amostra casual de 20 alunos.

   (a) Qual a probabilidade de o primeiro aluno escolhido ter carro e os outros não?

   (b) Qual a probabilidade de, no máximo, 10 alunos terem carro?

   (c) Calcule o valor esperado e a variância da proporção de alunos, na amostra, com carro.

2. O número de gralhas por página, em certo tipo de publicações, é uma variável aleatória com distribuição Poisson cuja média se assume igual a 0.3.

   (a) Numa amostra de cinco páginas, qual a probabilidade de as duas primeiras terem uma gralha cada e as restantes não terem gralhas?

   (b) Se a amostra casual for de 20 páginas, calcule a probabilidade de o número total de gralhas encontrado ser pelo menos 8.

   (c) Se a amostra casual for de 20 páginas, calcule a probabilidade de o número total de gralhas encontrado ser pelo menos 8.

   (d) Para uma amostra de 50 páginas, obtenha o valor esperado e a variância do número médio de gralhas por página.

   (e) Voltando às amostras da alínea a), calcule e interprete $P[\max X_i \leq 1]$.

3. Considere que o tempo de execução (em minutos) de uma peça é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 5.

   (a) Escreva a expressão da função densidade conjunta de uma amostra casual de dimensão 5.

   (b) Para a amostra da alínea anterior, calcule a probabilidade de os tempos de execução das duas primeiras peças serem inferiores a 8 minutos e, nas outras, superior.

   (c) Tomadas cinco peças ao acaso, calcule a probabilidade de exactamente duas delas terem tido um tempo de execução máximo de 8 minutos. Compare com a alínea anterior.

   (d) Para amostras de dimensão 100, obtenha a distribuição da soma e da média da amostra e indique as respectivas médias e variâncias.

   (e) Ainda com amostras de dimensão 100, comente a seguinte frase: "Em 90% dos casos, a média dos tempos de execução é inferior a 10 minutos".

4. Considere uma população discreta X com f.p. dada por $f(x) = 1/3$, $x = 0, 1, 2$. Determine a distribuição do máximo e do mínimo da amostra, se esta tiver dimensão 3.

5. Com destino à cidade B, realizam-se diariamente, a partir da cidade A, 5 voos. O atraso na partida dos voos, em minutos, tem distribuição normal de média 15 e desvio padrão 3. Nos voos de um dia, qual a probabilidade de o menor atraso ser inferior a 10 minutos?

6. O tempo de vida de uma lâmpada (em horas) tem distribuição exponencial de média igual a 100. Se 10 lâmpadas forem ligadas ao mesmo tempo, qual a distribuição do tempo de vida da lâmpada que, em primeiro lugar, deixe de funcionar?

7. Considere uma amostra casual de 5 observações retirada de uma população cuja função densidade de probabilidade é dada por $f(x) = 3x^2$, $0 < x < 1$.

   (a) Determine a probabilidade de o valor máximo dessa amostra ultrapassar 0.9.

   (b) Calcule a mesma probabilidade mas para o segundo maior valor da amostra.

8. Prove que, tendo X distribuição uniforme no intervalo (θ_1, θ_2), onde $\theta_1 < \theta_2$,

$$P(X_{(1)} > k) = P(X_{(n)} < k) \Leftrightarrow k = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \ .$$

9. Denote por $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra casual de dimensão $n > 2$ proveniente de uma população contínua com função de distribuição F e função densidade f.

   (a) Utilize a igualdade

$$P(X_{(n)} \leq y) = P(X_{(n)} \leq y, X_{(1)} \leq x) + P(X_{(n)} \leq y, X_{(1)} > x)$$

   justificando-a, para mostrar que a função de distribuição conjunta de $(X_{(1)}, X_{(n)})$ satisfaz

$$G_{1,n}(x, y) = [F(y)]^n - [F(y) - F(x)]^n \ , \quad x < y \ .$$

   (b) Conclua que a densidade conjunta do par $(X_{(1)}, X_{(n)})$ é dada por

$$g_{1,n}(x, y) = n(n-1)f(x)f(y)[F(y) - F(x)]^{n-2} \ , \quad x < y \ .$$

10. De uma população de média μ e variância σ^2 recolheu-se uma amostra casual de dimensão n. Qual o valor de $\mathrm{Cov}(X_1, \bar{X})$? E do coeficiente de correlação entre $\bar{X}$ e X_1?

11. Recolheu-se uma amostra aleatória de dimensão 5 de uma população normal. Determine a probabilidade de o desvio padrão da amostra ser inferior ao desvio padrão da população.

12. De uma população normal de média e variância desconhecidas retirou-se uma amostra casual.

    (a) Considere que a amostra tem 4 observações. Determine a percentagem de amostras em que a sua média difere, em valor absoluto, da média da população por valores superiores ao desvio padrão da população.

(b) Determine a percentagem de amostras casuais de 5 observações em que a sua média difere, em valor absoluto, da média da população por valores superiores ao do desvio padrão corrigido da amostra.

13. De uma população normal de desvio padrão igual a 4, recolheu-se uma amostra casual de dimensão 100.

    (a) Qual a probabilidade da média da amostra diferir da média da população (em valor absoluto) por mais de 0.5?

    (b) Se não conhecesse a distribuição da população, como aproximaria a probabilidade da alínea anterior?

    (c) Ilustre a qualidade da aproximação utilizada supondo que a população tem distribuição exponencial com desvio padrão igual a 4.

14. Seja X uma população normal de média 20 e variância 25. Calcule a dimensão mínima da amostra de modo a que seja pelo menos igual a 0.9 a probabilidade de a média da amostra se situar entre 18 e 22.

15. De uma população normal de média desconhecida e variância 4 retirou-se uma amostra casual de dimensão n.

    (a) Qual deve ser a dimensão da amostra para que seja pelo menos igual a 0.8 a probabilidade de a média da amostra diferir, em valor absoluto, da média da população por valores inferiores a 0.55?

    (b) Considere agora que a população tem média nula e que dispõe de uma amostra casual de dimensão 100. Qual a probabilidade de $\sum X_i^2$ exceder 576?

16. De uma população normal com variância igual a 64, tomou-se uma amostra casual de dimensão 3.

    (a) Qual a probabilidade de a variância da amostra exceder 78?

    (b) Responda à mesma questão para uma amostra de dimensão 16.

17. Um comerciante pretende adquirir frutos de um dos pomares A e B. Como o peso dos frutos é factor preferencial, o comerciante recolheu duas amostras independentes de 36 frutos de cada um dos pomares e escolhe o pomar a que corresponde a amostra com maior peso médio. Com que probabilidade escolherá o comerciante o pomar B se o peso dos frutos for normalmente distribuícom parâmetros dados pela tabela abaixo.

Pomar	Média	Desvio padrão
A	20	2
B	18	5

    Relacione esta probabilidade com a dimensão das amostras.

18. Admita a existência de duas populações X e Y normalmente distribuídas com parâmetros $\mu_X = 20$, $\mu_Y = 22$, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 16$. Recolheram-se duas amostras independentes de X e de Y, respectivamente com 9 e 16 elementos.

(a) Qual a probabilidade de a média da segunda amostra exceder a média da primeira em mais de 3 unidades?

(b) Qual a probabilidade de o desvio padrão corrigido da primeira amostra ultrapassar o dobro do desvio padrão corrigido da segunda amostra?

19. De duas populações normais com médias iguais e variâncias $\sigma_1^2 = 50$ e $\sigma_2^2 = 40$, recolheram-se, independentemente, amostras de 100 elementos. Qual a probabilidade de o valor absoluto da diferença entre as médias das amostras exceder 2?

20. De duas populações normais independentes, com variâncias iguais, foram extraídas duas amostras casuais com dimensões 10 e 5, respectivamente. Determine dois valores tais que entre eles esteja, com 95% de probabilidade, a razão das variâncias corrigidas das amostras.

21. Considere uma amostra casual de dimensão 5 extraída de uma população exponencial. Calcule a probabilidade de a média da amostra exceder o dobro da média da população.

22. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_8)$ uma amostra casual proveniente de uma população com distribuição exponencial de parâmetro θ.

    (a) Obtenha a distribuição da média da amostra.

    (b) Calcule $P(\bar{X} > 2/\theta)$.

    (c) Encontre uma expressão para $P(X_1 \leq c, X_2 \leq c, \ldots, X_8 \leq c)$ e relacione esse resultado com as distribuições dos extremos da amostra.

23. Suponha que está em presença de duas populações de Bernoulli com parâmetros respectivamente iguais a 0.6 e 0.5. Se retirarmos da primeira população uma amostra com 50 observações e da segunda uma outra, independente da primeira, com 40 observações, qual é aproximadamente a probabilidade de que o desvio entre as duas proporções amostrais seja, em valor absoluto, superior a 0.2.

24. Admita que a proporção de estudantes com opinião favorável às aulas teóricas é de 20%.

    (a) Numa amostra casual de 50 alunos, qual a probabilidade aproximada de se observarem mais de 12 alunos com opinião favorável?

    (b) Quantos alunos devem ser inquiridos de modo a que a divergência entre a frequência relativa da amostra e a verdadeira proporção seja inferior a 2%, com probabilidade de pelo menos 95%?

25. Admitindo que um em cada cinco alunos usa óculos, qual a probabilidade de se observar, numa amostra de dimensão 20, mais de 30% de alunos com óculos? E numa amostra de dimensão 50?

26. Um distribuidor de bebibdas alcoólicas sabe, por experiência, que a probabilidade de uma garrafa aguardente vínica, seleccionada ao acaso, ser falsificada é 0.05. Regularmente são verificadas mil garrafas nos postos de venda. Com pelo menos

0.975 de probabilidade, qual o desvio máximo a admitir entre a frequência relativa das garrafas não falsificadas e a verdadeira proporção?

27. Seja uma população com distribuição uniforme no intervalo $(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$. Determine a probabilidade de a média de uma amostra casual de 100 observações dessa população se situar entre $11\theta/8$ e $13\theta/8$.

28. Seja X uma população uniforme no intervalo $(0, \theta)$, $\theta > 0$, e considere uma amostra casual de dimensão n dela extraída, $X_1, \ldots, X_n$.

    (a) A partir de que dimensão da amostra a probabilidade de todas as observações serem maiores que a média da população é inferior a 0.001? Justifique.

    (b) Considerando $n = 100$, qual a probabilidade aproximada de a média da amostra diferir (em valor absoluto) da média da população por valores superiores a $\theta/\sqrt{300}$?

    (c) Mostre que $Y = -\ln(X/\theta)$ é tal que $Y \sim \mathrm{Ex}(1)$.

    (d) Seja $G_n = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}$ a média geométrica amostral. Mostre que

$$\sqrt{n}[\ln G_n - \ln(\theta/e)] \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1) \ .$$