Movimento Browniano

Equações Diferenciais e Cálculo Estocástico

ISEG

Movimento Browniano

Definição

Um p.e. $B = \{B_t; t \geq 0\}$ *é um movimento Browniano se*

1. $B_0 = 0$.
2. *B tem incrementos independentes.*
3. *Se $s < t$, $B_t - B_s$ é uma v.a. com distribuição $N(0, t - s)$.*
4. *O processo B tem trajectórias contínuas.*

Propriedades do movimento Browniano

- O mov. Browniano é um processo Gaussiano. De facto, as distrib. dimensionalmente finitas de B, i.e. a distribuição dos vectores $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$ é normal.
- $E[B_t] = 0$ (resulta da cond. 3).
- Auto-covariância: $E[B_s B_t] = \min(s,t)$
  Prova: Se $s \leq t$:

$$\begin{aligned} E[B_s B_t] &= E\left[B_s (B_t - B_s) + B_s^2\right] \\ &= E[B_s (B_t - B_s)] + E\left[B_s^2\right] \\ &= E[B_s]\, E[B_t - B_s] + s = s \end{aligned}$$

- Um p.e. que verifique as condições 1,2 e 3. tem uma versão com trajectórias contínuas.
  Prova: Como $(B_t - B_s) \sim N(0, t-s)$, é possível mostrar que

$$E\left[(B_t - B_s)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} (t-s)^k .$$

  Para provar este resultado pode-se usar integração por partes e o método de indução em k. Com $k = 2$, obtemos

$$E\left[(B_t - B_s)^4\right] = 3\,(t-s)^2 .$$

  Pelo critério de continuidade de Kolmogorov (ver aula 2), existe uma versão de B com trajectórias contínuas.
- Pode demonstrar-se que existe um p.e. que cumpre as condições 1,2,3 e 4 (pelo teorema da extensão de Kolmogorov (ver Oksendal) e pelo critério de continuidade de Kolmogov).

- Na def. de mov. Browniano, o espaço de probab. é arbitrário. Contudo é possível descrever a estrutura deste espaço, considerando a aplicação:

$$\begin{aligned} \Omega &\to C\left([0,\infty),\mathbb{R}\right) \\ \omega &\to B_{\cdot}\left(\omega\right) \end{aligned}$$

que a cada elemento ω faz corresponder uma função contínua com valores em $\mathbb{R}$ (a trajectória). O espaço de probabilidade é o espaço de funções continuas $C\left([0,\infty),\mathbb{R}\right)$ equipado com a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_C$ e com probabilidade induzida pela aplicação anterior: $P \circ B^{-1}$ (esta probabilidade diz-se a medida de Wiener).

- Como corolário ao critério da continuidade de Kolmogorov e à fórmula $E\left[\left(B_t - B_s\right)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}\left(t-s\right)^k$, temos que

$$\left|B_t\left(\omega\right) - B_s\left(\omega\right)\right| \leq G_\varepsilon\left(\omega\right)\left|t-s\right|^{\frac{1+\alpha}{p}-\varepsilon} \leq G_\varepsilon\left(\omega\right)\left|t-s\right|^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

para qualquer $\varepsilon > 0$ e onde $G_\varepsilon\left(\omega\right)$ é uma v.a.
- $\left|B_t - B_s\right| \approx \left|t-s\right|^{\frac{1}{2}}$
- $E\left[\left(B_{t+\Delta t} - B_t\right)^2\right] = \Delta t$
- intervalo $[0,t]$ e partições do intervalo $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ com $t_j = \frac{tj}{n}$
- Variação total infinita: $\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta B_k\right| \approx n\left(\frac{t}{n}\right)^{1/2} \to \infty$ quando $n \to \infty$.
- Variação quadrática: $\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta B_k\right|^2 \approx n\left(\frac{t}{n}\right) = t$ quando $n \to \infty$.

- As trajectórias de o mov. Browniano não são diferenciáveis em nenhum ponto (quase certamente).
  ideia da prova:

$$\frac{B_{t+\Delta t} - B_t}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta t} Z}{\Delta t} = \frac{Z}{\sqrt{\Delta t}},$$

  onde $Z \sim N(0,1)$.Então, esta razão ou taxa tende para ∞ quando $\Delta t \to 0$ em probabilidade, pois $P\left(\frac{Z}{\sqrt{\Delta t}} > K\right) \to 1$ para qualquer K, quando $\Delta t \to 0$. Logo a derivada não existe no ponto t.
- Auto-semelhança: Se $B = \{B_t; t \geq 0\}$ é um mov. Browniano então, para qualquer $a > 0$, o processo $\{a^{-1/2} B_{at}; t \geq 0\}$ tb. é um mov. Browniano.
- Exercício: prove que $\{a^{-1/2} B_{at}; t \geq 0\}$ verifica as condições da def. de mov. Browniano.

Processos estocásticos relacionados com o mov. Browniano

- Mov. Browniano com drift:

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t,$$

  com $\sigma > 0$ e μ constantes. Claramente é um processo Gaussiano com $E[Y_t] = \mu t$ e $cov(s,t) = E[Y_s Y_t] = \sigma^2 \min(s,t)$.
- Mov. Browniano geométrico: (modelo proposto por Samuelson, e mais tarde por Black, Scholes e Merton para a descrição dos preços de activos financeiros)

$$X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}.$$

  A distribuição de X é lognormal. Ou seja, $\ln(X_t)$ tem ditribuição normal.
- Ponte Browniana:

$$Z_t = B_t - tB_1, \quad t \in [0,1].$$

  Note que $Z_1 = Z_0 = 0$. Este processo é Gaussiano com $E[Z_t] = 0$ e $cov(s,t) = E[Z_s Z_t] = \min(s,t) - st$.

Martingalas e o mov. Browniano

- Considere um mov. Browniano $B = \{B_t; t \geq 0\}$ definido em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Defina-se a filtração gerada por B: é $\left\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\right\}$ com

$$\mathcal{F}_t^B = \sigma \{B_s, s \leq t\} .$$

- Considera-se que $\mathcal{F}_t^B$ também contém os conjuntos de probabilidade 0 (considera-se que $N \in \mathcal{F}_0$ sempre que $P(N) = 0$).

- Algumas consequências da inclusão dos conjuntos de probabilidade 0 na filtração
  1. Qualquer versão de um processo adaptado também é adaptado.
  2. A filtração é contínua pela direita, i.e.

$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^B = \mathcal{F}_t^B .$$

- Exemplo: Se B é um mov. Browniano então o processo $X_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_t$ é adaptado à filtração gerada por B mas o processo $Y_t = \sup_{0 \leq s \leq t+1} B_t$ já não é.

Proposição

Se $B = \{B_t; t \geq 0\}$ é um mov. Browniano e $\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\}$ é a filtração gerada por B, então os seguintes processos são $\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\}$-martingalas:

1. B_t.
2. $B_t^2 - t$.
3. $\exp\left(aB_t - \frac{a^2 t}{2}\right)$.*(TPC: prove que é martingala)*

Demonstração.

1. Claramente B_t é $\mathcal{F}_t^B$-mensurável e integrável. Além disso, como $B_t - B_s$ é independente de $\mathcal{F}_s^B$ (pela independência dos incrementos de B)

$$E\left[B_t - B_s | \mathcal{F}_s^B\right] = E\left[B_t - B_s\right] = 0.$$

2. Claramente, $B_t^2 - t$ é $\mathcal{F}_t^B$-mensurável e integrável. Pelas propriedades de B e da esperança condicional:

$$\begin{aligned} E\left[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s^B\right] &= E\left[\left(B_t - B_s + B_s\right)^2 | \mathcal{F}_s^B\right] - t \\ &= E\left[\left(B_t - B_s\right)^2\right] + 2B_s E\left[B_t - B_s | \mathcal{F}_s^B\right] + B_s^2 - t \\ &= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s. \end{aligned}$$

□

- Prova auxiliar: Provemos que $E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}(\Delta B_k)^2 - t\right)^2\right] = 0$. Usando a independência dos incrementos e o facto de $E\left[(\Delta B_k)^2\right] = \frac{t}{n}$, temos

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}(\Delta B_k)^2 - t\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left[(\Delta B_k)^2 - \frac{t}{n}\right]\right)^2\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} E\left[(\Delta B_k)^2 - \frac{t}{n}\right]^2.$$

Usando $E\left[(B_t - B_s)^{2j}\right] = \frac{(2j)!}{2^j \cdot j!}(t-s)^j$, temos

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}(\Delta B_k)^2 - t\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[3\frac{t}{n} - 2\left(\frac{t}{n}\right)^2 + \left(\frac{t}{n}\right)^2\right]$$
$$= 2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{t}{n}\right)^2 = 2t\left|\frac{t}{n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Prova auxiliar: Provemos que a variação total $V = \sup_{\pi}.\sum_{k=1}^{n}|\Delta B_k|$ é infinita com probabilidade 1.Usando a continuidade das trajectórias do mov. Browniano, temos

$$\sum_{k=1}^{n}(\Delta B_k)^2 \leq \sup_{k}.|\Delta B_k|\sum_{k=1}^{n}|\Delta B_k| \leq V\sup_{k}.|\Delta B_k| \underset{|\pi|\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

se $V < \infty$. Mas isto contradiz o facto de $\sum_{k=1}^{n}(\Delta B_k)^2$ convergir em média quadrática para t.

- Logo, $V = \infty$.