Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integral Estocástico

Equações Diferenciais e Cálculo Estocástico

ISEG

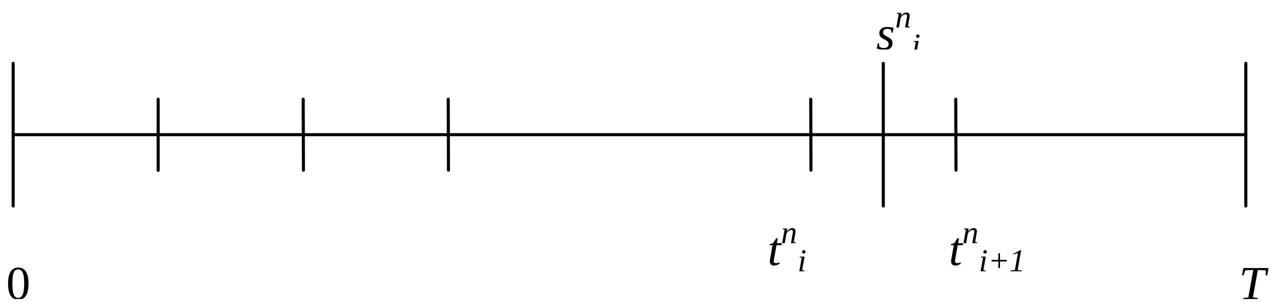
Integrais estocásticos

- Motivação: Consideremos uma equação diferencial "estocástica"do tipo
$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \, "\frac{dB_t}{dt}".$$
- "$\frac{dB_t}{dt}$" é ruído estocástico. Não existe no sentido clássico pois B não é diferenciável.
- Eq. diferencial estocástica na forma integral:
$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) + " \int_0^t \sigma(s, X_s) \, dB_s "$$
- Como definir integrais estocásticos do tipo:
$$\int_0^T u_s \mathrm{d} B_s \quad ?$$
onde B é um movimento Browniano e u é um processo estocástico adequado.

- Alternativa 1: Considerar o integral como um integral de Riemann-Stieltjes.
- Considere uma sucessão de partições de $[0, T]$ e uma sucessão de pontos intermédios nessas partições:

$$\begin{aligned} \tau_n &: \; 0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \cdots < t_{k(n)}^n = T \\ s_n &: \; t_i^n \leq s_i^n \leq t_{i+1}^n, \quad i = 0, \ldots, k(n) - 1, \end{aligned}$$

tais que $\lim_{n \to \infty} \sup_i \left(t_{i+1}^n - t_i^n \right) = 0$.



Integral de Riemann-Stieltjes:

$$\int_0^T f dg := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(s_i^n\right) \Delta g_i,$$

onde $\Delta g_i := g(t_{i+1}^n) - g(t_i^n)$, se o limite existir e for independente das sucessões τ_n e s_n.

- O integral de Riemann Stieltjes (R-S) $\int_0^T fdg$ existe se f é contínua e g tem variação total limitada, i.e.

$$\sup_{\tau_n} \sum_i |\Delta g_i| < \infty.$$

- Se f é contínua e g é de classe C^1 então o integral de (R-S) $\int_0^T fdg$ existe e

$$\int_0^T fdg := \int_0^T f(t)\, g'(t) dt,$$

- No caso do mob. Browniano B, é claro que $B'(t)$ não existe, pelo que não se pode definir o integral trajectorial

$$\int_0^T u_t(\omega)\, dB_t(\omega) \overset{\times}{\neq} \int_0^T u_t(\omega)\, B_t'(\omega)\, dt$$

- Em geral, já sabemos que o mov. Browniano tem variação total não limitada e portanto não se pode definir o integral (R-S) $\int_0^T u_t(\omega)\, dB_t(\omega)$.
- Se u tem trajectórias de classe C^1, integrando por partes, o integral trajectorial (R-S) existe e

$$\int_0^T u_t(\omega)\, dB_t(\omega) = u_T(\omega)\, B_T(\omega) - \int_0^T u_t'(\omega)\, B_t(\omega)\, dt.$$

- Problema: Por exemplo, $\int_0^T B_t(\omega)\, dB_t(\omega)$ não existe como integral R-S. É útil considerar processos mais irregulares que processos com trajectória de classe C^1. Como definir o integral estocástico para estes processos?

- Construiremos o integral estocástico $\int_0^T u_t dB_t$ através de uma abordagem probabilística.

Definição

Consideraremos processos u da classe $L^2_{a,T}$, que se define como a classe de processos estocásticos $u = \{u_t,\ t \in [0, T]\}$, tais que:

1. *u é adaptado e progressivamente mensurável: i.e. u_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável e para todo $t \in [0, T]$, a aplicação $(s, \omega) \to u_s(\omega)$, definida em $[0, t] \times \Omega$ é mensurável relativamente à σ-álgebra $\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t$.*
2. $E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right] < \infty$.

- A condição 1. é necessária para mostrar que as v.a. do tipo $\int_0^t u_s ds$ são $\mathcal{F}_t$-mensuráveis.
- A condição 2. permite mostrar que u como funçao das duas variáveis t e ω pertence ao espaço $L^2([0, T] \times \Omega)$ e que (pelo teorema de Fubini):

$$E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right] = \int_0^T E\left[u_t^2\right] dt = \int_{[0,T]\times\Omega} u_t^2(\omega)\, dt P(d\omega).$$

- ideia: definiremos $\int_0^T u_t dB_t$ para $u \in L^2_{a,T}$ como o limite em média quadrática (limite em $L^2(\Omega)$) de integrais de processos simples.

Integral estocástico para processos simples

Definição

Processos simples: $u \in \mathcal{S}$ (conjunto dos processos simples em $[0, T]$) diz-se um processo simples se

$$u_t = \sum_{j=1}^{n} \phi_j \mathbf{1}_{(t_{j-1}, t_j]}(t), \tag{1}$$

onde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, e as v.a. ϕ_j são de quadrado integrável ($E\left[\phi_j^2\right] < \infty$) e $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mensuráveis.

Definição

Se u é um processo simples da forma (1) ($u \in \mathcal{S}$) então definimos o integral estocástico de u relativamente ao mov. Browniano B por

$$\int_0^T u_t dB_t := \sum_{j=1}^{n} \phi_j \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right).$$

Exemplo

Considere o processo simples

$$u_t = \sum_{j=1}^{n} B_{t_{j-1}} \mathbf{1}_{(t_{j-1}, t_j]}(t).$$

Então

$$\int_0^T u_t dB_t = \sum_{j=1}^{n} B_{t_{j-1}} \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right).$$

É evidente que, pela propriedade dos incrementos independentes de B, temos

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T u_t dB_t\right] &= \sum_{j=1}^{n} E\left[B_{t_{j-1}}\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} E\left[B_{t_{j-1}}\right] E\left[B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right] = 0. \end{aligned}$$

Proposição

(Propriedade de isometria). Seja $u \in \mathcal{S}$ um processo simples. Então temos a seguinte propriedade de isometria:

$$E\left[\left(\int_0^T u_t dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right]. \tag{2}$$

Demonstração.

Com $\Delta B_j := B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$, temos

$$E\left[\left(\int_0^T u_t dB_t\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{j=1}^n \phi_j \Delta B_j\right)^2\right]$$
$$= \sum_{j=1}^n E\left[\phi_j^2 (\Delta B_j)^2\right] + 2\sum_{i<j}^n E\left[\phi_i \phi_j \Delta B_i \Delta B_j\right].$$

$\square$

Demonstração.

(cont.) Note-se que como $\phi_i \phi_j \Delta B_i$ é $\mathcal{F}_{j-1}$-mensurável e ΔB_j é independente de $\mathcal{F}_{j-1,}$ temos

$$\sum_{i<j}^n E\left[\phi_i \phi_j \Delta B_i \Delta B_j\right] = \sum_{i<j}^n E\left[\phi_i \phi_j \Delta B_i\right] E\left[\Delta B_j\right] = 0.$$

Por outro lado, como ϕ_j^2 é $\mathcal{F}_{j-1}$-mensurável e ΔB_j é independente de $\mathcal{F}_{j-1}$,

$$\sum_{j=1}^n E\left[\phi_j^2 (\Delta B_j)^2\right] = \sum_{j=1}^n E\left[\phi_j^2\right] E\left[(\Delta B_j)^2\right]$$
$$= \sum_{j=1}^n E\left[\phi_j^2\right](t_j - t_{j-1}) =$$
$$= E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right].$$

$\square$

- Outras propriedades de $\int_0^T u_t dB_t$ para $u \in \mathcal{S}$:
  1. Linearidade: Se $u, v \in \mathcal{S}$:
  $$\int_0^T (au_t + bv_t)\, dB_t = a\int_0^T u_t dB_t + b\int_0^T v_t dB_t. \qquad (3)$$
  2. Média 0:
  $$E\left[\int_0^T u_t dB_t\right] = 0. \qquad (4)$$

Demonstração.

Exercício: basta usar a definição de integral estocástico para processos simples. $\square$

Integral de Itô para processos de $L^2_{a,T}$

Lema

Se $u \in L^2_{a,T}$ então existe uma sucessão de processos simples $\left\{u^{(n)}\right\}$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T \left|u_t - u_t^{(n)}\right|^2 dt\right] = 0. \qquad (5)$$

Demonstração.

Passo 1. Suponha que u é processo contínuo em média quadrática, ou seja:
$$\lim_{s\to t} E\left[|u_t - u_s|^2\right] = 0.$$

Defina-se $t_j^n := \frac{j}{n} T$ e
$$u_t^n = \sum_{j=1}^{n} u_{t_{j-1}^n} \mathbf{1}_{\left(t_{j-1}^n, t_j^n\right]}(t). \qquad (6)$$

Demonstração.

(cont.) Temos pelo teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^T \left|u_t - u_t^{(n)}\right|^2 dt\right] &= \left[\int_0^T E\left[\left|u_t - u_t^{(n)}\right|^2\right] dt\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} E\left[\left|u_{t_{j-1}^n} - u_t\right|^2 dt\right] \\
&\leq T \sup_{|t-s|\leq \frac{T}{n}} E\left[\left|u_s - u_t\right|^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

(cont.) Passo 2. (ideia da demonstração) Suponha agora que $u \in L^2_{a,T}$ e considere a sucessão de processos $\left\{v^{(n)}\right\}$ definidos por

$$v_t^n = n \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} u_s ds.$$

Estes processos são contínuos em média quadrática (até têm as trajectórias contínuas) e pertencem à classe $L^2_{a,T}$. Por outro lado, temos que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T \left|u_t - v_t^{(n)}\right|^2 dt\right] = 0$$

pois

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left|u_t(\omega) - v_t^{(n)}(\omega)\right|^2 dt = 0.$$

Demonstração.

(cont.) e podemos aplicar o teorema de convergência dominada no espaço $[0,T]\times\Omega$, pois pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e mudando a ordem de integração:

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_0^T \left|v_t^{(n)}\right|^2 dt\right] &= E\left[n^2\int_0^T \left|\int_{t-\frac{1}{n}}^t u_s ds\right|^2 dt\right] \\
&\leq nE\left[\int_0^T \left(\int_{t-\frac{1}{n}}^t u_s^2 ds\right) dt\right] \\
&= nE\left[\int_0^T u_s^2 \left(\int_s^{s+1/n} dt\right) ds\right] \\
&= E\left[\int_0^T u_s^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

□

Definição

O integral estocástico ou o integral de Itô do processo $u\in L^2_{a,T}$ é definido como o limite (em $L^2(\Omega)$):

$$\int_0^T u_t dB_t = \lim_{n\to\infty}(L^2) \int_0^T u_t^{(n)} dB_t, \tag{7}$$

onde $\left\{u^{(n)}\right\}$ é uma sucessão de processos simples que satisfaz (5).

- O limite existe, pois devido à prop. de isometria para processos simples, a sucessão $\left\{\int_0^T u_t^{(n)} dB_t\right\}$ é uma sucessão de Cauchy em $L^2(\Omega)$ e portanto é convergente.

Demonstração.

$$E\left[\left(\int_0^T u_t^{(n)} dB_t - \int_0^T u_t^{(m)} dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T \left(u_t^{(n)} - u_t^{(m)}\right)^2 dt\right]$$
$$\leq 2E\left[\int_0^T \left(u_t^{(n)} - u_t\right)^2 dt\right] + 2E\left[\int_0^T \left(u_t - u_t^{(m)}\right)^2 dt\right] \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Propriedades do integral de Itô

- Propriedades do integral de Itô $\int_0^T u_t dB_t$ para $u \in L^2_{a,T}$.
  1. Isometria:
  $$E\left[\left(\int_0^T u_t dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right]. \tag{8}$$
  2. Média 0:
  $$E\left[\int_0^T u_t dB_t\right] = 0 \tag{9}$$
  3. Linearidade:
  $$\int_0^T (au_t + bv_t)\, dB_t = a\int_0^T u_t dB_t + b\int_0^T v_t dB_t. \tag{10}$$

Demonstração.

Estas propriedades verificam-se facilmente para processos $u \in \mathcal{S}$ (processos simples). Logo, passando ao limite, verificam-se também para processos $u \in L^2_{a,T}$. □

Exemplo

Vamos mostrar que

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T.$$

Como o processo $u_t = B_t$ é contínuo em média quadrática, consideramos a sucessão de aproximação de processos simples (6), i.e.

$$u_t^n = \sum_{j=1}^{n} B_{t_{j-1}^n} \mathbf{1}_{\left(t_{j-1}^n, t_j^n\right]}(t),$$

com $t_j^n := \frac{j}{n}T$.

Exemplo

(cont.)

$$\begin{aligned}
\int_0^T B_t dB_t &= \lim_{n\to\infty}(L^2) \int_0^T u_t^{(n)} dB_t = \\
&= \lim_{n\to\infty}(L^2) \sum_{j=1}^{n} B_{t_{j-1}^n}\left(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}(L^2) \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(B_{t_j^n}^2 - B_{t_{j-1}^n}^2\right) - \left(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(B_T^2 - T\right),
\end{aligned}$$

onde se usou o facto de $E\left[\left(\sum_{j=1}^n \left(\Delta B_{t_j^n}\right)^2 - T\right)^2\right] = 0$ e $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left(B_{t_j^n}^2 - B_{t_{j-1}^n}^2\right) = \frac{1}{2}B_T^2$.

- Cálculo auxiliar: Provemos que $E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta B_{t_j^n}\right)^2 - T\right)^2\right] = 0$.

Usando a independência dos incrementos e o facto de $E\left[\left(\Delta B_{t_j^n}\right)^2\right] = \Delta t_j^n$, temos

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta B_{t_j^n}\right)^2 - T\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\Delta B_{t_j^n}\right)^2 - \Delta t_j^n\right]\right)^2\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E\left[\left(\Delta B_{t_j^n}\right)^2 - \Delta t_j^n\right]^2.$$

Usando $E\left[\left(B_t - B_s\right)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}\left(t-s\right)^k$, temos

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta B_{t_j^n}\right)^2 - T\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[3\Delta t_j^n - 2\left(\Delta t_j^n\right)^2 + \left(\Delta t_j^n\right)^2\right]$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta t_j^n\right)^2 = 2T\sup_{i}\left|\Delta t_j^n\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Nota: Pela fórmula $E\left[\left(B_t - B_s\right)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}\left(t-s\right)^k$ temos que

$$Var\left[\left(\Delta B\right)^2\right] = E\left[\left(\Delta B\right)^4\right] - \left(E\left[\left(\Delta B\right)^2\right]\right)^2$$
$$= 3\left(\Delta t\right)^2 - \left(\Delta t\right)^2 = 2\left(\Delta t\right)^2.$$

Já sabemos também que

$$E\left[\left(\Delta B\right)^2\right] = \Delta t.$$

Portanto, se Δt é pequeno, a variância de $\left(\Delta B\right)^2$ é desprezável quando comparada com o seu valor esperado $\Longrightarrow$portanto quando $\Delta t \to 0$ ou "$\Delta t = dt$", temos formalmente:

$$\left(dB_t\right)^2 = dt \tag{11}$$