Estatística MAEG 2011/12
Exercícios Capítulo 2

1. São propostos os seguintes estimadores para a variância de uma população normal de média conhecida:

$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2; \quad T_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2; \quad T_3 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

   (a) Estude-os quanto ao enviesamento, consistência e eficiência.

   (b) Calcule, e compare, o EQM (erro quadrático médio) dos estimadores.

2. Recolhida a amostra casual (X_1, X_2, X_3) de um universo com distribuição normal de média μ e variância σ^2, analise a eficiência relativa de $T = (X_1 + 2X_2 + X_3)/4$ em relação a $\bar{X}$ como estimadores de μ.

3. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra casual retirada de um universo de média μ e variância σ^2. Estude a consistência de

$$T = \frac{2\sum_{i=1}^{n} iX_i}{n(n+1)}$$

   como estimador de μ. Compare T e $\bar{X}$ quanto à eficiência.
   [Nota: $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ e $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(2n+1)(n+1)/6$.]

4. Considere uma população com distribuição uniforme no intervalo $(0,\theta)$, $\theta > 0$, da qual se recolheu uma amostra casual. Para estimar θ propõe-se o estimador $T = \max X_i$.

   (a) Analise-o quanto ao enviesamento e consistência.

   (b) Será T uma estatística suficiente para θ?

   (c) Com base no estimador T, proponha um estimador centrado para θ. Calcule a sua variância.

5. Com base na amostra casual simples (X_1, X_2, X_3) retirada de uma população com distribuição exponencial, propuseram-se as seguintes estatísticas para estimar a média

$$T_1 = X_1; \quad T_2 = \frac{X_1+X_2}{2}; \quad T_3 = \frac{X_1+2X_2}{3}; \quad T_4 = \bar{X}\ .$$

   (a) Verifique que todos elas são estimadores não enviesados da média.

   (b) Calcule a eficiência relativa entre os estimadores.

   (c) Mostre que T_4 é uma estatística suficiente.

6. Recolheram-se de forma independente duas amostras casuais de dimensão n de uma população exponencial. Sendo $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ as médias respectivas, considere os seguintes estimadores para a média da população:

$$T_1 = n \times \min X_i; \quad T_2 = \bar{X}; \quad T_3 = \frac{\bar{X}+\bar{Y}}{2}\ .$$

(a) Estude o enviesamento dos 3 estimadores propostos.

(b) Entre T_1 e T_2, qual lhe parece ser o melhor estimador para a média da população?

7. Considere uma população normal de variância 1. Compare quanto ao EQM os estimadores seguintes para a média da população:

$$T_1 = \bar{X}; \quad T_2 = (X_1 + X_n)/2; \quad T_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \ .$$

8. De uma população Poisson retirou-se uma amostra casual de dimensão n. Prove que

$$T_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} + \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

é um estimador não enviesado para a média da população.

9. Considere uma amostra casual de dimensão n retirada de uma população com função distribuição $F(x) = 1 - (\theta/x)^3$, $0 < \theta < x$. Mostre que o estimador $T_1 = \min X_i$ é enviesado para θ, embora assintoticamente não o seja. Corrija o enviesamento do estimador.

10. Seja X um universo com distribuição normal de média 0 e variância θ do qual se recolheu uma amostra casual com uma única observação.

    (a) Será X uma estatística suficiente para θ? E $T_1 = |X|$?

    (b) Mostre que X^2 é estimador não enviesado de θ.

11. Considere uma população com função densidade dada por

$$f(x \mid \mu) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2}\right], \quad x > 0 \ ,$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$.

    (a) Verifique se existe algum estimador T centrado e de variância mínima (entre os estimadores centrados) para o parâmetro μ.

    (b) Poder-se-á afirmar que o estimador obtido na alínea anterior é um estimador de máxima verosimilhança para μ?

12. Seja X uma população com função probabilidade dada por

$$f(x \mid \alpha) = \alpha(1/\alpha - 1)^{1-x} \ , \quad x = 0, 1,$$

onde $\alpha \in (0, 1)$. Determine o estimador da máxima verosimilhança para α e verifique se ele é centrado.

13. Admite-se que o número de veículos que passam em certo local durante a manhã segue um processo de Poisson. Em nove manhãs, obtiveram-se as seguintes contagens para o número de veículos observados entre 8h00 e as 9h00: (95, 100, 80, 70, 110, 98, 97, 90, 70).

(a) Obtenha o estimador e a estimativa de máxima verosimilhança para o número médio de veículos que passam naquele local em cada hora do período da manhã.

(b) Mostre que se trata de um estimador consistente e que é o mais eficiente.

(c) Obtenha uma estimativa de máxima verosimilhança para a probabilidade de decorrerem 2 minutos sem passar qualquer veículo.

14. Uma fábrica produz certo tipo de componente electrónico cuja vida, em horas, é uma v.a. com função densidade dada por $f(x \mid \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x > 0$, onde $\lambda > 0$. Numa amostra de 100 componentes, constatou-se uma soma total de durações igual a 59500 horas.

    (a) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para a média da população e mostre que este é o estimador mais eficiente dessa quantidade.

    (b) Sabendo que os componentes se vendem em embalagens de 100, calcule a estimativa de máxima verosimilhança para o número médio de componentes, por embalagem, que duram mais de 400 horas.

15. Considere uma amostra casual de dimensão n recolhida de uma população com função densidade dada por

$$f(x \mid \theta) = 2x/\theta^2 \ , \quad 0 < x \leq \theta$$

com $\theta > 0$.

    (a) Determine a função de verosimilhança e mostre que $\hat{\theta} = \max X_i$ é o estimador de máxima verosimilhança para θ.

    (b) Analise $\hat{\theta}$ no que se refere ao enviesamento e à eficiência.

    (c) Determine o estimador de θ pelo método dos momentos.

    (d) Aponte as limitações do estimador obtido na alínea anterior para esta situação particular (Nota: pense que se poderia ter observado a amostra (1; 2 ; 6)).

16. Observada uma amostra de dimensão n de uma população com distribuição geométrica, isto é, $f(x \mid \beta) = \beta(1-\beta)^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ com $\beta \in (0, 1)$, determine o estimador de máxima verosimilhança para a média da população e verifique se é mais eficiente. [Nota: $\mu = (1-\beta)/\beta$ e $\sigma^2 = (1-\beta)/\beta^2$.]

17. Recolheu-se uma amostra casual de dimensão n de uma população X com densidade dada por $f(x \mid \beta) = \beta x^{\beta-1}$, $0 < x < 1$, onde $\beta > 0$.

    (a) Obtenha o estimador de β pelo método dos momentos.

    (b) Determine o estimador de máxima verosimilhança para $1/\beta$.

    (c) Sabendo que $Y = -\ln X$, é tal que $Y \sim \text{Ex}(\beta)$, verifique se o estimador obtido na alínea b) é o mais eficiente.

18. Considere um universo com densidade dada por $f(x \mid k) = (2k-2x)/k^2$, $0 < x < k$, onde $k > 0$, do qual se recolheu uma amostra casual de dimensão n.

(a) Supondo $n = 1$, obtenha o estimador de máxima verosimilhança para k. Calcule a respectiva estimativa quando $x = 5$.

(b) Discuta a obtenção do estimador de máxima verosimilhança para k para outros valores de n. Tendo-se observado a amostra $(5; 3.2; 2.1; 9.2; 7.3)$, obtenha a estimativa de máxima verosimilhança para k.

19. Considere um universo com densidade de probabilidade dada por $f(x \mid \alpha) = \Gamma(\alpha)^{-1} \exp(-x)\ x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha > 0$, do qual se recolheu uma amostra casual que se concretizou em $(5; 3.2; 2.1; 9.2; 7.3)$.

    (a) Obtenha uma estimativa de máxima verosimilhança para α.

    (b) Obtenha uma estimativa de máxima verosimilhança para a variância da população.

20. Seleccionou-se de uma população uniforme no intervalo $(0, \theta)$, $\theta > 0$, uma amostra casual dimensão n.

    (a) Determine o estimador da máxima verosimilhança para θ. Tratar-se-á de um estimador centrado? Em caso negativo proponha, partindo do estimador de máxima verosimilhança, um estimador centrado.

    (b) Determine o estimador do método dos momentos para θ.

    (c) Qual dos estimadores escolheria? Justifique.

21. De uma população com distribuição dada por $f(x \mid \alpha) = \exp(-2\alpha - x)$, $x \geq 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, recolheu-se a uma amostra casual que se concretizou na amostra observada $(1.1, 3.0, 2.1, 3.5, 1.4, 2.8, 2.2)$.

    (a) Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para α.

    (b) Obtenha a estimativa de α pelo método dos momentos.

22. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra casual retirada de uma população X com função densidade dada por

$$f(x \mid \theta) = \theta(1 - x)^{\theta - 1}\ , \quad 0 < x < 1,$$

    onde $\theta > 1$.

    (a) Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ.

    (b) Com base na amostra observada $(0.5, 0.3, 0.6, 0.4)$, calcule a estimativa de máxima verosimilhança para a probabilidade de X ser maior que 0.5. Justifique.

    (c) Calcule o limite inferior para a variância dos estimadores não enviesados de θ.

23. Seja X um universo tal que $X \mid \alpha \sim \mathrm{U}(\alpha, 2\alpha{+}8)$ com $\alpha > 0$. Determine o estimador da máxima verosimilhança para o parâmetro α e a respectiva estimativa a partir da amostra casual $(2, 4.5, 10, 2.5, 6)$.

24. A duração, em horas, de determinado componente electrónico utilizado num radar é uma v.a. com distribuição exponencial. Considere que se recolheu uma amostra casual cujo valor observado é (1100, 1300, 900, 1000, 700).

    (a) Obtenha uma estimativa da máxima verosimilhança para a probabilidade de, numa amostra de dimensão 10, nenhum componente durar menos de 600 horas.

    (b) Obtenha também uma estimativa de máxima verosimilhança para a probabilidade de, num conjunto de 10 componentes, pelo menos um durar menos de 600 horas.

25. Num saco existem bolas, numeradas de 1 a θ. Extraiu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.

    (a) Obtenha a estimativa do número de bolas existentes no saco pelo método dos momentos.

    (b) Obtenha o estimador de máxima verosimilhança para θ. Compare a estimativa decorrente deste estimador com a obtida na alínea anterior.

26. O tempo, em horas, que um aluno leva a responder a uma questão do teste é uma variável aleatória com distribuição exponencial. Numa amostra casual de 40 observações verificou-se um total de 480 minutos.

    (a) Determine a estimativa de máxima verosimilhança para a percentagem de questões que são resolvidas em menos de 15 minutos.

    (b) Se um teste tiver 8 questões, calcule a estimativa para a probabilidade de o aluno resolver todas as questões, sabendo que a duração da prova é 2 horas.

27. Admite-se que o tempo de reparação de certo tipo de máquinas segue uma distribuição normal de parâmetros desconhecidos. Para estimar esses parâmetros recolheu-se uma amostra aleatória de tempos de reparação (em minutos). Os dados observados são os seguintes: $n = 10$, $\sum x_i = 846$, $\sum x_i^2 = 71607$. Estime a probabilidade de o tempo de reparação de uma máquina ser inferior a 83 minutos.

28. A altura máxima das ondas durante um ano, em determinado local, é uma variável aleatória X com função densidade dada por

$$f(x \mid \theta) = \frac{x}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) \quad , \quad x > 0$$

    onde $\theta > 0$.

    (a) Com base numa amostra casual de tamanho n proveniente de X, obtenha o estimador de máxima verosimilhança de θ.

    (b) Mostre que se trata de um estimador não enviesado e investigue a sua eficiência. [Nota: X^2 tem distribuição exponencial de média 2θ.]

    (c) Admita que nos últimos 6 anos se observaram as seguintes alturas máximas: 3.1, 2.4, 2.6, 2.2, 1.9, 2.8. Estime $P(X > 3)$.

29. Seja X uma população com distribuição dada por $f(x \mid \theta) = 2\theta^2 x^{-3}$, $x > \theta > 0$, da qual se obteve a seguinte amostra observada: $(15, 8, 10, 5, 17)$.

    (a) Compare as estimativas de θ, obtidas pelos métodos dos momentos e da máxima verosimilhança.

    (b) Obtenha uma estimativa de máxima verosimilhança para a média da população.