Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integral Estocástico

Cálculo Estocástico

ISEG

Integrais estocásticos indefinidos

- Considere um processo estocástico $u \in L^2_{a,T}$. Então, para qualquer $t \in [0, T]$, o processo $u\mathbf{1}_{[0,t]}$ também pertence a $L^2_{a,T}$ e podemos definir o integral estocástico indefinido:

$$\int_0^t u_s \mathrm{d}B_s := \int_0^T u_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

- O processo estocástico $\left\{\int_0^t u_s \mathrm{d}B_s,\ 0 \le t \le T\right\}$ é o integral estocástico indefinido de u relativamente a B.

- Principais propriedades do integral estocástico indefinido:

1. Aditividade: Para $a \leq b \leq c$, temos:

$$\int_0^b u_s \mathrm{d}B_s + \int_b^c u_s \mathrm{d}B_s = \int_a^c u_s \mathrm{d}B_s.$$

2. Factorização: Se $a < b$ e $A \in \mathcal{F}_a$, então:

$$\int_a^b \mathbf{1}_A u_s \mathrm{d}B_s = \mathbf{1}_A \int_a^b u_s \mathrm{d}B_s.$$

Esta propriedade permance válida, substituindo $\mathbf{1}_A$ por qualquer variável aleatória limitada e $\mathcal{F}_a$-mensurável.

3. Propriedade de martingala: Se $u \in L^2_{a,T}$ então o processo integral estocástico indefinido $M_t = \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s$ é uma martingala relativamente à filtração $\mathcal{F}_t$.

4. Continuidade: Se $u \in L^2_{a,T}$ então o processo integral estocástico indefinido $M_t = \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s$ tem uma versão com trajectórias contínuas.
5. Desigualdade maximal para o integral estocástico indefinido: Se $u \in L^2_{a,T}$, $M_t = \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s$, então para qualquer $\lambda > 0$ temos

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| > \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^2} E\left[\int_0^T u_t^2 \mathrm{d}t\right].$$

- Prova de 1.: Exercício - (TPC).
- Prova de 3.
  Seja $u^{(n)}$ uma sucessão de processos simples tais que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T \left|u_t - u_t^{(n)}\right|^2 dt\right] = 0.$$

Seja $M_n(t) = \int_0^t u_s^{(n)} \mathrm{d}B_s$. e seja ϕ_j o valor de $u^{(n)}$ no intervalo $(t_{j-1}, t_j]$, com $j = 1, \ldots, n$.

Se $s \leq t_k \leq t_{m-1} \leq t$, então:

$$\begin{aligned} & E\left[M_n(t) - M_n(s) \,|\mathcal{F}_s\right] \\ & = E\left[\phi_k\left(B_{t_k} - B_s\right) + \sum_{j=k+1}^{m-1} \phi_j \Delta B_j + \phi_m\left(B_t - B_{t_{m-1}}\right) |\mathcal{F}_s\right], \end{aligned}$$

e pelas propriedades da esperança condicionada, temos:

$$= E\left[\phi_k\left(B_{t_k} - B_s\right)|\mathcal{F}_s\right] + \sum_{j=k+1}^{m-1} E\left[E\left[\phi_j \Delta B_j | \mathcal{F}_{j-1}\right]|\mathcal{F}_s\right] +$$

$$+ E\left[E\left[\phi_m\left(B_t - B_{t_{m-1}}\right)|\mathcal{F}_{t_{m-1}}\right]|\mathcal{F}_s\right].$$

$$= \phi_k E\left[B_{t_k} - B_s | \mathcal{F}_s\right] + \sum_{j=k+1}^{m-1} E\left[\phi_j E\left[\Delta B_j | \mathcal{F}_{j-1}\right] | \mathcal{F}_s\right] +$$

$$+ E\left[\phi_m E\left[B_t - B_{t_{m-1}} | \mathcal{F}_{t_{m-1}}\right] | \mathcal{F}_s\right]$$

e usando a independência dos incrementos do movimento Browniano, obtemos:

$$= 0.$$

Como a convergência em média quadrática implica a convergência em média quadrática das esperanças condicionadas, temos que

$$E\left[M(t) - M(s) | \mathcal{F}_s\right] = 0$$

e o integral estocástico é uma martingala.

- Prova de 4: Com a mesma notação que na prova anterior, $M_n(t)$ é claramente um processo com trajectórias contínuas, pois é o integral estocástico de um processo simples (Exercício: Prove esta afirmação). Então, pela desigualdade maximal de Doob aplicada a $M_n - M_m$, com $p = 2$, temos:

$$P\left[\sup_{0 \le t \le T} |M_n(t) - M_m(t)| > \lambda\right] \le \frac{1}{\lambda^2} E\left[|M_n(T) - M_m(T)|^2\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} E\left[\left(\int_0^T \left(u_t^{(n)} - u_t^{(m)}\right) dB_t\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} E\left[\int_0^T \left|u_t^{(n)} - u^{(m)}\right|^2 dt\right] . \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

onde usámos a isometria de Itô.

Podemos portanto escolher uma sucessão crescente de naturais n_k, $k = 1, 2, \ldots$, tal que

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t) \right| > 2^{-k}\right] \leq 2^{-k}.$$

Os acontecimentos:

$$A_k := \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t) \right| > 2^{-k} \right\}$$

verificam portanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty.$$

Logo, pelo Lema de Borel-Cantelli, temos que $P(\limsup_k A_k) = 0$ ou

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t) \right| > 2^{-k} \text{ para infinitos } k\right] = 0.$$

Portanto, para quase todo o $\omega \in \Omega$, temos que existe $k_1(\omega)$ tal que

$$\sup_{0 \le t \le T} \left| M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t) \right| \le 2^{-k} \text{ para } k \ge k_1(\omega).$$

Portanto, $M_{n_k}(t, \omega)$ é uniformemente convergente em $[0, T]$ quase certamentee portanto o limite, que denotamos por $J_t(\omega)$, é uma função contínua na variável t. Finalmente, como $M_{n_k}(t.\cdot) \to M_t(\cdot)$ em média quadrática (ou em $L^2(P)$) para todo o t,então temos que ter

$$M_t = J_t \quad \text{q.c. e para todo o } t \in [0, T].$$

e o integral estocástico indefinido tem uma versão contínua.

Variação quadrática do integral estocástico indefinido

- Seja $u \in L^2_{a,T}$. Então

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u_s dB_s \right)^2 \xrightarrow{L^1(\Omega)} \int_0^t u_s^2 ds,$$

quando $n \to \infty$ e com $t_j := \frac{jt}{n}$.

Extensões do integral estocástico

- Pode substituir-se $\{\mathcal{F}_t\}$ (filtração gerada pelo mov. Browniano) por uma filtração maior $\mathcal{H}_t$ tal que o mov. Browniano B_t seja uma $\mathcal{H}_t$-martingala.
- Podemos substituir a condição 2) $E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right] < \infty.$ na definição de $L^2_{a,T}$ pela condição (mais fraca):
2') $P\left[\int_0^T u_t^2 dt < \infty\right] = 1.$
- Seja $L_{a,T}$ o espaço de processos que verifica a condição 1 da def. de $L^2_{a,T}$ (i.e. u é progressivamente mensurável) e a condição 2'). O integral estocástico pode ser definido para processos $u \in L_{a,T}$ mas, neste caso, em geral o integral estocástico não tem valor esperado zero nem se verifica a isometria de Itô.

Exercícios:

- Exercício: Prove directamente, usando a definição de integral estocástico que
$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds.$$
Sugestão: Note que
$$\sum_j \Delta\left(s_j B_j\right) = \sum_j s_j \Delta B_j + \sum_j B_{j+1} \Delta s_j.$$
- Exercício: Considere uma função determinística g tal que $\int_0^T g(s)^2 ds < \infty$. Mostre que o integral estocástico $\int_0^T g(s)\, dB_s$ é uma variável aleatória Gaussiana e determine a sua média e a sua variância.