Matemática I – 2º Semestre 2011/12
Ficha de exercícios

Semana 6, Parte II – Sucessões e Séries

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Averigue se as seguintes sucessões são monótonas crescentes ou decrescentes.

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ b) $b_n = \dfrac{n}{n+2}$ c) $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

1.2. Calcule os limites das seguintes sucessões.

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ b) $b_n = \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2+2}$ c) $c_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ d) $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$

1.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 10.4: Exercícios 2 a 4.

1.4. Determine se as seguintes séries são convergentes. Em caso afirmativo, determine a sua soma:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 3^n$ c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ d) $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$ e) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} 5^{-n}$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Defina:
a) Função
b) Função real
c) Função real de variável real
d) Sucessão
e) Série.

2.2. Demonstre que $\sum_{\ell=0}^{n-1} ak^{\ell} = a\dfrac{k^n-1}{k-1}$, onde $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, e n é um inteiro finito.

2.3. Sabendo que, se $|c| < 1$, a série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c^n$ é convergente e a sua soma é dada por $1/(1-c)$, mostre que a série $\displaystyle\sum_{n\geq p} c^n$ é convergente e a sua soma é dada por $c^p/(1-c)$.

3 Problemas e Modelização

3.1. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguintes séries convergem e calcule a sua soma:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - x^2\right)^n$ b) $4x^2 + 16x^4 + 64x^6 + ...$

3.2. Utilize a teoria das séries geométricas para escrever as seguintes dizímas sob a forma de fracções irredutíveis:

a) $0,999...$ b) $1,666...$ c) $0,1212...$

3.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 6 e 7.

4 Exercícios adicionais

4.1. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{an^2 + n}{n^2 - 1}$, com $a \in \mathbb{R}$. Indique a resposta correcta:

a) se $a \neq 0$ então a série é divergente b) se $a \neq 0$ então a série é convergente
c) a série é convergente, $\forall a \in \mathbb{R}$ d) a série é convergente para $a = 1$.

4.2. Calcule $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n\right]$.

4.3. Indique para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguintes séries convergem e calcule as suas somas:

a) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} (3x - 4)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^n$ c) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(x + 1)^{2n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x - 3}{2}\right)^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |x|)^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(x + 1)^{3n}}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n-1}}$.

4.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 5 e 8.