Matemática I – 2º Semestre 2010/11
Ficha de exercícios

Semana 8: Diferenciabilidade

NOTA: Nesta ficha usa-se indiferentemente as seguintes notações: $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$.

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Calcule a derivada em ordem a x das funções das alíneas *a)* a *i)* do exercício 1.1 da ficha anterior.

1.2. Seja $f(x) = e^x$, $g(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{Z}$, e $h(x) = \sin x$. Calcule:

a) $\dfrac{d}{dx}\left[f(x) + g(x) + h(x)\right]$ b) $\dfrac{d}{dx}\left[5f(x) + 2g(x)\right]$ c) $\dfrac{d}{dx}\left[g(x)h(x)\right]$

d) $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)g(x)h(x)\right]$ e) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{h(x)}{f(x)}\right]$ f) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}\right]$.

1.3. Seja $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Indique o domínio de f e discuta a continuidade e a diferenciabilidade de f.

b) Calcule: $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ e $\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$.

1.4. Calcule o diferencial das seguintes funções em ordem à respectiva variável:

a) $x^5 + 2x^4 + 1$ b) $-\sqrt{u}$ c) e^y d) $\ln z$ e) $\dfrac{1}{x}$ f) $\sin u$ g) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1.5. Derive as seguintes funções em ordem a x:

a) $\left(5x^{70} + 3x + 1\right)^2$ b) $\left(5x^2 + 3x + 1\right)^{70}$ c) $\cos\left(3x^5 - x\right)$ d) $e^{-\frac{x}{2}}$

e) $\sqrt{x-3}$ f) $\dfrac{1}{\ln x}$ g) $e^{\sin x}$ h) $x + \sqrt{x^2 - 1}$

i) $\ln(\sin x)$ j) $\ln\left(x^2 + 1\right)$ k) $\ln^4\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$ ℓ) $e^{-\cos\left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right)}$

1.6. Seja f uma função diferenciável duas vezes em $\mathbb{R}$ tal que: $2x^2 + 6xf(x) + [f(x)]^2 = 18$. Calcule $\dfrac{df(x)}{dx}$ e $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

1.7. Calcule, através do Teorema da Derivada da Função Inversa, a derivada no ponto 1 (caso exista) das funções inversas obtidas no exercício 1.5 da ficha anterior.

1.8. Seja a função $f(x) = x^2e^x$.

a) Determine os intervalos em que f admite inversa.

b) Seja $g(y)$ a função inversa de $f(x)$ e x_0 um ponto onde existe $f'(x_0) \neq 0$. Calcule a derivada de g no ponto $y_0 = f(x_0)$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Seja $f(x) = x^2$. Demonstre, pela definição, que: $\dfrac{df(x)}{dx} = 2x$.

2.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que $\dfrac{f(a) - f(x)}{a - x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, com $h = a - x$.

2.3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e $k \in \mathbb{R}$. Mostre que:

a) $\dfrac{d}{dx}\left[f(x) + g(x)\right] = \dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{dg(x)}{dx}$.

b) $\dfrac{d}{dx}\left[kf(x)\right] = k\dfrac{df(x)}{dx}$.

3 Problemas e Modelização

3.1. O preço das acções das seguintes empresas é dado em função do tempo t por:

- Empresa A: $2t^2 + 4t$
- Empresa B: $3t^2 + t$
- Empresa C: $\frac{2t}{t^2+1}$.

a) No instante $t = 1$ qual a empresa cujo preço das acções está a crescer mais depressa?
b) Qual o período durante o qual o preço das acções da empresa C está a crescer?

3.2. Estude diferenciabilidade das seguintes funções, nos respectivos domínios:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \ln\left(1 + x^2\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

3.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Resolva a seguinte equação: $\dfrac{df(x)}{dx} = f(x)$.

3.4. Três empresas de moldes plásticos têm os seguintes custos de produção, que dependem directamente do preço p do petróleo:

- Empresa 1: $5p^3 + 2p + 1$
- Empresa 2: $2p^{3/2} + p$
- Empresa 3: $\sqrt{p} + \frac{1}{p}$.

a) Determine para cada empresa a taxa de variação média do custo de produção dada uma variação do preço do petróleo de 1 €/ℓ para 4 €/ℓ.

b) Determine para cada empresa a taxa de variação instantânea do custo de produção quando o preço do petróleo é de 1 €/ℓ.

c) Sabendo que durante um breve período de crise $t \in [0; 2]$ o preço do petróleo em função do tempo foi: $p(t) = e^t$, determine qual a empresa cujo custo de produção estava a crescer mais depressa no instante $t = 1$.

3.5. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 6.7: Exercício 8;
Secção 6.9: Exercícios 9 e 10.

3.6. Seja a função $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se}\, x < 0 \\ e^{-kx} & \text{se}\, x \geq 0 \end{cases}$, com $k > 0$.

a) Indique o domínio de f e esboce o gráfico da função.

b) Discuta a continuidade da função no seu domínio.

c) Discuta a diferenciabilidade de f no seu domínio.

d) Considere a função $g(x) = \sqrt{x}$. Discuta a continuidade e a diferenciabilidade de $g \circ f$, e calcule a sua derivada onde possível.

3.7. Seja a função $h(x) = f(x \ln x)$, com f diferenciável em $\mathbb{R}$. Sabendo que $f(0) = \sqrt{3}$ e que $f'(0) = 2$, indique a equação da recta tangente ao gráfico da função h em $x = 1$.

3.8. Imagine que o consumo de gasolina c de um automóvel depende da sua velocidade v da seguinte forma: $c(v) = v^3 + 2v + 5$ (naturalmente, temos $v \geq 0$).

a) Se o condutor duplicar a velocidade, como varia o consumo de gasolina?

b) Seja f a função que dado o consumo de gasolina nos indica a velocidade do veículo: isto é, a função tal que $f[c(v)] = v$. Calcule $f'(5)$, justificando cuidadosamente a sua resposta.

3.9. Indique a equação da recta tangente ao gráfico da função $f(x)$, definida implicitamente pela equação $\sin[xf(x)] = f(x)$, no ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

3.10. Seja $g(x) = f[xg(x)]$ uma função definida implicitamente em $\mathbb{R}$. Sabendo que $f'[g(1)] = 2$, qual o valor de $g'(1)$?

3.11. Seja a função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x^x$.
a) Trata-se de uma função exponencial? Porquê?
b) Trata-se de uma função polinomial? Porquê?
c) Utilize a identidade $e^{\ln x} = x$ para calcular a derivada da função f em ordem a x.

4 Exercícios adicionais

4.1. Derive as seguintes funções em ordem a x:

a) $\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2$	b) $\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^3$	c) $\sqrt{e^x+1}$	d) $e^{-\sqrt{x}}$
e) $e^{x^3}\ln\left(x^2\right)$	f) $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$	g) $\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x-1}}$	h) e^{x^2}
i) $\ln\left(e^{3x}+x^2\right)$	j) $e^x \ln x$	k) $\sin(2x+1)$	ℓ) xe^x
m) $\cos x + x\cos^2\left(x^2\right)$	n) $\sin x \cos x$	o) $\tan\left(x^2+1\right)$	p) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

4.2. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

4.3. Indique o valor correcto de $L = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^\alpha - 2\alpha(x-1)-2}{3x^2-6x+3}$:

a) $L = -\alpha - 3$ b) $L = 0$ c) $L = \frac{\alpha^2-\alpha}{3}$ d) L não existe

4.4. Qual o valor do limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(5/x)}{2/x}$?

a) $\frac{5}{2}$ b) 0 c) $-\frac{5}{2}$ d) $\frac{2}{5}$.

4.5. Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que $h(x) = f[g(x)]$. Sabendo que $f(-1) = 2$, $f'(-1) = 1/3$, $g(3) = -1$, e $g'(3) = -4$, indique a equação da recta tangente ao gráfico da função h, em $x = 3$:

a) $y = -\frac{4}{3}x + 2$ b) $y = -\frac{4}{3}x + 6$ c) $y = -4x + 2$ d) $y = -x + 5$

4.6. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 6.2: Exercícios 5 e 7.

4.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Resolva a seguinte equação: $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} = -f(x)$.

4.8. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 6.7: Exercícios 6 e 7;
Secção 6.9: Exercícios 1, 3 e 7. **Secção 7.1:** Exercícios 1, 6, 7, 8 e 10;
Secção 7.3: Exercícios 1 a 3.