Matemática I – 2º Semestre 2010/11
Ficha de exercícios

Semana 9 / 10 / 11: Elasticidades, Teorema do Valor Intermédio e do Valor Médio, regra de L'Hôpital, extremos e convexidade

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{e^{\sin x}-e^{\cos x}}{\sin x-\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)^2}{e^{2x-1}-4x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

1.2. Seja a função $f(x)=\ln x$.
a) Obtenha a aproximação linear de f em torno do ponto $x=1$.
b) Obtenha a aproximação quadrática de f em torno do ponto $x=1$.
c) Esboce o gráfico de f e compare com os gráficos das funções obtidas nas alíneas anteriores.
d) Estime o valor de ln(1,1).

1.3. A aproximação quadrática da função $f(x)=(x+1)^5$ em torno de $x=1$ é dada por:

a) $f(x)\simeq 80x^2-80x+32$ b) $f(x)\simeq -80x^2+80x+32$

c) $f(x)\simeq -80x^2-80x-32$ d) $f(x)\simeq 80x^2+80x+32$

1.4. Seja a função $f(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2$. A aproximação de Taylor de segunda ordem de f em torno de $x=1$ é:

a) $x-1+(x-1)^2$ b) $x-1-(x-1)^2$

c) $-(x-1)^2$ d) $(x-1)^2$

1.5. Escreva a fórmula de Taylor de ordem n para $f(x)=e^x$, em torno de $x=1$, apresentando o resto na forma de Lagrange. Calcule o limite do resto quando n tende para $+\infty$.

1.6. Mostre que a equação $xe^x=\dfrac{1}{2}$ tem uma única solução no intervalo aberto $(-1,1)$.

1.7. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 8.6: Exercício 4 e 5;
Secção 8.7: Exercício 5 e 6.

1.8. Seja a função $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 12$.

a) Determine os pontos de estacionariedade da função f.
b) Determine os extremos da função f estudando a sua segunda derivada.
c) Indique se os extremos são locais ou globais.

1.9. Seja a função $f\!:I \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sin(x^2)$, com $I = [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$.

a) Determine os pontos de estacionariedade da função f.
b) Determine os extremos da função f estudando a sua segunda derivada.
c) Indique se os extremos são locais ou globais.

1.10. Sejam as funções $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ e $h(x) = x^3$.

a) Determine os pontos de estacionariedade de cada uma destas funções.
b) Através das derivadas de ordem 2 ou superior, determine se esses pontos correspondem a pontos de mínimo, de máximo ou de inflexão.
c) Determine as concavidades de cada uma destas funções.

1.11. Um ponto de inflexão de uma função é sempre ponto de estacionariedade dessa função: verdadeiro ou falso? Justifique a resposta.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Dada uma variação Δx da sua variável x, a função sofre uma variação $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Demonstre que $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$.

2.2. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ funções diferenciáveis no seu domínio. Definindo $u = g(x)$, mostre que $El_x f[g(x)] = El_u f(u) \cdot El_x u$.

2.3. Utilize a aproximação linear para mostrar que, perto da origem, temos: $\sin x \simeq x$.

2.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).
a) Defina função crescente.
b) Mostre que se $f'(x) \geq 0$ para $x \in (a, b)$, então f é crescente.

2.5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável duas vezes em $\mathbb{R}$ e seja o polinómio de segundo grau $p(x) = \alpha(x - a)^2 + \beta(x - a) + \gamma$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Determine os coeficientes α, β, γ que satisfazem as seguinte condições, para $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(a) = p(a) \\ f'(a) = p'(a) \\ f''(a) = p''(a) \end{cases}.$$

2.6. Indique a definição de função crescente e de função decrescente.

2.7. Indique a definição de ponto de estacionariedade de uma função real de variável real.

2.8. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com segunda derivada continua em I, e a um ponto do interior de I.
a) Indique a definição de ponto de inflexão de f.
b) Prove que se a é um ponto de inflexão de f, então $f''(a) = 0$.

3 Problemas e Modelização

3.1. Numa fábrica de chocolate em pó, o custo de produção f do chocolate, expresso em €/kg, depende do preço x do cacau, também em €/kg, da seguinte forma: $f(x) = x^2 + 3$, definido para $x \geq 0$. Considere um cenário em que o preço do cacau mudou de 1 €/kg para 2 €/kg. Responda às seguinte perguntas (indicando as unidades adequadas):

a) Qual foi a variação absoluta do preço do cacau?

b) Qual foi a variação absoluta do preço do chocolate?

c) Qual foi a variação relativa do preço do cacau?

d) Qual foi a variação relativa do preço do chocolate?

e) Qual foi a taxa de variação absoluta do preço do chocolate face ao aumento do preço do cacau.

f) Qual foi a taxa de variação relativa do preço do chocolate face ao aumento do preço do cacau.

g) Considere agora um acréscimo infinitesimal dx no preço x do cacau. Calcule a taxa de variação absoluta e a taxa de variação relativa (elasticidade) do preço do chocolate face a este aumento infinitesimal do preço do cacau.

3.2. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 7.7: Exercícios 2 e 6.

3.3. Estime o valor aproximado de sin(0,1), justificando a sua resposta. Estime o erro da aproximação que efectuou.

3.4. Seja f uma função definida implicitamente pela equação $[f(x)]^3 = x^3 f(x) + x + 1$. Sabendo que $f(0) = 1$, indique a aproximação linear a $f(x)$ em torno de $x = 0$.

3.5. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = e^{x-1}$.
a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem n da função f em torno de 1.
b) Obtenha a majoração do resto fazendo $x = \frac{1}{2}$ e $n = 3$.

3.6. Utilize a fórmula de Taylor para calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$.

3.7. Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$. Determine a aproximação linear de f em torno do ponto $x = 1$ e utilize-a para obter um valor aproximado de $\sqrt{1{,}1}$.

3.8. Um congelador avariado opera entre -3°C e +2°C e tem um consumo de energia que varia com a sua temperatura t segundo: $t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t + 10$.

a) Determine as temperaturas para as quais o consumo de energia é máximo e é mínimo.
b) A função consumo de energia tem algum ponto de inflexão?

3.9. Seja a funçao: $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{se}\, x < -1 \\ |x| & \text{se} -1 \leq x \leq +1 \\ e^{-x+1} & \text{se}\, x > +1 \end{cases}$.

a) Qual o domínio da função f?

b) Discuta a continuidade e a diferenciabilidade de f no seu domínio.

c) Determine os pontos de estacionariedade da função f.

d) Determine os extremos da função f, indicando se são locais ou globais.

e) Determine os extremos da função f no intervalo $[-4, -1]$.

3.10. Considere a função $f(x) = x \sin x$.

a) Calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem de f em torno do ponto 0.

b) A função f tem um único ponto de estacionariedade no intervalo aberto $]-1; 1[$. Determine-o.

c) Classifique o ponto de estacionariedade obtido na alínea anterior através do estudo da segunda derivada.

d) Existem outros pontos de extremo de f no intervalo $]-1; 1[$? Justifique a resposta.

4 Exercícios adicionais

4.1. Seja f uma função diferenciável, com $f(x) \neq 0$. Determine a elasticidade em ordem a x das seguintes funções:

a) $x^5 f(x)$ b) $[f(x)]^{3/2}$ c) $x + \sqrt{f(x)}$ d) $\dfrac{1}{f(x)}$.

4.2. Utilize a fórmula de Taylor para escrever o polinómio $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ como soma de potências de $(x + 2)$.

4.3. Seja $y = f(x)$ uma função definida implicitamente pela equação $xy - x^2 = 2y + x$. A aproximação linear de $f(x)$ em torno do ponto $(4, 10)$ é dada por:

a) $-5x + 3$ b) $-\frac{1}{2}(x - 24)$ c) $\frac{1}{3}(x + 25)$ d) $x + 3$

4.4. Seja $f(x) = (2x - a)^m$, com $m \in \mathbb{N}$. Mostre que a aproximação de Taylor de segunda ordem da função f em torno de 0 é:

$$(-a)^m + 2m(-a)^{m-1}x + 2m(m-1)(-a)^{m-2}x^2.$$

4.5. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 7.7: Exercícios 5 e 9;
Secção 7.4: Exercícios 1 a 4, 7, 9 e 10
Secção 7.5: Exercícios 1, 2, 4 e 5
Secção 7.6: Exercícios 1, 2 e 4;
Secção 7.10: Exercícios 1 e 2;
Secção 8.4: Exercícios 6 e 7.

4.6. Seja a função f e o intervalo I do exercício 1.9. Mostre que f tem pelo menos dois pontos de inflexão no intervalo I.

4.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que: $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$. Prove que a é um ponto de máximo local de f.

4.8. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 8.6: Exercícios 1, 3 e 6;
Secção 8.7: Exercícios 2 a 4.