Matemática I – 2º Semestre 2011/12
Ficha de exercícios

Semana 12 / 13: Integrais e Áreas

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int x^2 dx$ b) $\int \sqrt{x} dx$ c) $\int e^x dx$ d) $\int \cos y dy$ e) $\int \frac{x^5}{5} dx$ f) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$
g) $\int \frac{1}{2} dx$ h) $\int x^4 dt$ i) $\int (\sin u + x^2) dx$ j) $\int (\sin u + x^2) du$ k) $\int e^{7u} dx$
ℓ) $\int \frac{1}{2} dt$.

1.2. Calcule a primitiva $F(x) = \int f(x)dx$:
a) tal que $F(2) = 0$, para $f(x) = x^4$;
b) tal que $F(0) = 1$, para $f(x) = e^x$;
c) tal que $F(1) = \pi$, para $f(x) = x^{-1}$;
d) tal que $F(0) = e$, para $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 12$;
e) tal que $F(1) = 0$, para $f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

1.3. Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_0^2 x^3 dx$ b) $\int_1^0 (-\sqrt{x}) dx$ c) $\int_0^{\ln 1} e^{-t} dt$ d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos y dy$ e) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$
f) $\int_{-1}^1 (6x^5 + \frac{1}{3}x^2 - 2x + 7) dx$ g) $\int_2^3 (\sin u + x^{\frac{1}{3}}) dx$ h) $\int_e^{7e} e^{7u} dx$ i) $\int_a^b 1 dt$.

1.4. Calcule a área entre o gráfico de f e o eixo das abcissas para:
a) $f(x) = x^2$, e $x \in [0; 2]$;
b) $f(x) = -x^2$, e $x \in [0; 2]$;
c) $f(t) = e^{-t}$, e $t \in [1; 5]$;
d) $f(x) = -\sqrt{\sqrt{x}}$, e $x \in [0; 1]$;
e) $f(x) = \frac{-x^4 - 2x^2}{x}$, e $x \in [-1; 1]$.

1.5. Estude a convergência dos seguintes integrais impróprios, e calcule-os sempre que possível:

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ d) $\int_{-\infty}^{+\infty} u^3 du$ e) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$.

1.6. Calcule, utilizando a primitivação por partes, as seguintes primitivas:

a) $\int x e^x dx$ b) $\int x^2 \ln x dx$ c) $\int t \sin t dt$ d) $\int x^2 \sin x dx$ e) $\int e^x \cos x dx$.

1.7. Calcule, utilizando a primitivação por substituição, as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int 2x\sin(x^2)dx$ b) $\displaystyle\int e^{x^2}x dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^5+7}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}dx.$

1.8. Calcule: a) $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_4^t e^{-x^2}dx$ b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^\alpha \frac{1}{\sqrt{s^4+1}}ds$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.9. Calcule a área dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le 5 \wedge y \ge -5x+5 \wedge y \ge \ln x\}$

b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le e^x \wedge x\le 1\}$

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le y\le -x^2+2\}$.

1.10. Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^{\sin t} x^3dx$ b) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 te^{-t^2}dt$ d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x dx$ e) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3x+7}dx$ g) $\displaystyle\int_{-3}^4 |x-2|dx$ h) $\displaystyle\int_0^1 3e^{5x+1}dx$ i) $\displaystyle\int_0^\pi 2xt^3\cos t^4 dt$ j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx.$

2 Definições e Demonstrações

2.1. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, e $a,b,\lambda\in\mathbb{R}$ constantes. Demonstre que:

a) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx.$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, com $a\le c\le b$.

2.2. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua ímpar, e $k\in\mathbb{R}$.

a) Demonstre que $\displaystyle\int_{-k}^k f(x)dx = 0.$

b) Interprete geometricamente o resultado anterior.

2.3. Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $a<b$, e seja $d(a,b)$ a distância entre estes dois pontos.

a) Mostre que $\displaystyle d(a,b)=\int_a^b dx.$

b) Interprete geometricamente o resultado anterior.

3 Problemas e Modelização

3.1. Um poço de petróleo tem uma taxa de extracção (medida em barris por unidade de tempo) que varia com o tempo t segundo: $10e^{-2t}$.

a) Qual a quantidade de petróleo extraída do poço ao fim do tempo $t=50$?

b) Resolva o mesmo problema para uma taxa que varia segundo 2^{-t}, explicando claramente todos os cálculos.

3.2. Seja a funçao $f(x) = \sin x$. Calcule a área entre o gráfico de f e o eixo das abcissas para:
a) $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$;
b) $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$;
c) $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
d) Discuta os resultados do ponto de vista geométrico.
e) Discuta os resultados do ponto de vista do teorema apresentado no exercício **??**.

3.3. Seja a funçao $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$. Calcule a área entre o gráfico de f e o eixo das abcissas para $x \in [-1; 2]$.

3.4. Calcule as seguintes áreas através de integrais:

a) Calcule a área que fica acima do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$ e abaixo do eixo das abcissas.

b) Calcule a área entre os gráficos das funçoes $f(x) = x^2 + x + 1$ e $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$, para $x \in [-3, 0]$.

3.5. Determine o domínio, os intervalos de monotonia e os extremos locais das funções:

a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t dt$ b) $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$.

3.6. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_\pi^{x^2} e^{-2t} dt$. Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 de f em torno de $x = 0$.

3.7. Considere a função $F(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t) dt$, onde f é uma função contínua e estritamente positiva em $\mathbb{R}$. Prove que $x = 0$ é um minimizante local da função $F(x)$.

3.8. Considere a função $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{b+x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, com $b > 0$.
a) Determine os valores de a e de b para os quais a função f é contínua.
b) Faça $a = b = 1$ e considere a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^x f(t) dt$. Calcule $F(1)$. Em seguida, mostre que a função F admite inversa no intervalo $(0, +\infty)$.

3.9. Seja a função $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2+1} \left(\frac{1+t}{t}\right) dt$.
a) Calcule $f(-1)$.
b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = -1$.

3.10. Considere a função com domínio D_f: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1 & \text{se } x < 0 \\ e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.
a) Para que valores de $x \in D_f$ a função f é diferenciável? Escreva a expressão da função derivada $f'(x)$.
b) Determine $G(x) = \displaystyle\int_{-1}^x f(t) dt$, definida em $[-1, \infty)$.

3.11. Determine a função f, duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, que verifica: $f''(x) = 2\cos x + xe^x$, $f'(0) = 2$, $f(0) = 1$

3.12. Sem utilizar a primitivação, calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln\left(t^2+1\right) dt}{x^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos t dt}{x^2}$.

4 Exercícios adicionais

4.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 9.1: Exercícios 1 a 9;
Secção 9.2: Exercícios 1 a 6, 8.

4.2. Determine uma primitiva das seguintes funções, nos respectivos domínios:

a) x^2e^x b) $x\sqrt{x+1}$ c) $x^3\sqrt{1+x^2}$ d) $2x\cos x$ e) $\sin^2 x$

f) $\ln(2x-1)$ g) $\mathrm{x}^2\ln x$ h) $\arctan x$ i) $\ln^2 x$ j) $e^x\cos x$.

4.3. Determine, por substituição, uma primitiva das seguintes funções:

a) $\dfrac{x}{1+x^2}$ b) $\sqrt{1-\sin^2 x}$

c) $\dfrac{e^{\frac{x}{4}}}{1+e^{\frac{x}{10}}}$, com $x = 20\ln t$ $(t > 0)$ d) $\dfrac{\cos x}{\sin^6 x}$, com $x = \arcsin t$.

4.4. Estude a convergência dos integrais impróprios e calcule-os quando tal for possível:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x dx$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx$ e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-3} dx$ f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

4.5. Calcule a área que fica acima do gráfico da funçao $f(x) = \ln x$, para $x \in [0,1]$, e abaixo da recta $y = 0$.

4.6. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 9.3: Exercícios 4 a 6;
Secção 9.5: Exercícios 2 e 3;
Secção 9.6: Exercício 3;
Secção 9.7: Exercícios 1, 4 e 12.