Estatística MAEG 2011/12
Exercícios Capítulo 3

1. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra de dimensão n de uma população X com distribuição dada por $f(x \mid \theta) = \exp(2\theta - x)$, $x > 2\theta$, $\theta > 0$.

   (a) Mostre que $Y = X_{(1)} - 2\theta$ pode ser tomada como variável fulcral para estimação do parâmetro .

   (b) Construa um intervalo de confiança a 95% para θ com base na amostra (2.1; 3.3; 1.9; 1.0; 3.2).

   (c) Sabendo que $\mu_X = 1 + 2\theta$, construa um intervalo de confiança a 95% para μ_X com base na amostra da alínea anterior.

2. Seja X uma população com função densidade $f(x \mid \theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$.

   (a) Mostre que $Y = F(X)$ pode ser usada como variável fulcral para a construção de intervalos de confiança para θ.

   (b) Utilizando a variável fulcral da alínea a) e admitindo que observou $x_1 = 0.6$, construa um intervalo de confiança a 95% para θ.

   (c) Obtenha o estimador de máxima verosimilhança para θ e, a partir da sua distribuição assinótica, construa um intervalo de confiança aproximado a 95% para θ assumindo que se tinha observado, numa amostra de dimensão 100, $\sum \ln x_i = -64.87$.

   (d) Mostre que $Y = -\ln X$ tem distribuição exponencial de parâmetro θ. Tirando partido deste facto, construa um intervalo de confiança a 95% para θ e compare-o com aquele que obteve na alínea anterior. Comente.

3. Seja X uma população com distribuição exponencial e considere-se uma amostra dessa população com uma única observação. Se o intervalo de confiança a $(1-\alpha) \times 100\%$ para a média da população for $(x/2, 10x)$, qual o grau de confiança utilizado?

4. Considere uma população com distribuição normal de parâmetros desconhecidos. Dessa população foi retirada uma amostra casual de dimensão 25. Suponha que a amostra forneceu os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 75 \ ; \quad \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 321 \ .$$

   (a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a média.

   (b) Construa um intervalo de confiança a 95% para o desvio padrão.

5. De uma população normal de média e variância desconhecidas, seleccionou-se uma amostra casual de 9 observações a partir da qual se obteve $\bar{x} = 4$ e $s^2 = 2$.

   (a) Obtenha um intervalo de confiança a 90% para o desvio padrão da população.

   (b) Obtenha um intervalo de confiança a 90% para a média da população.

(c) Suponha agora que se conhece a variância da população, sendo esta igual a 4. Construa o intervalo de confiança a 90% para a média da população utilizando a variável fulcral mais adequada.

(d) Qual a probabilidade de a amplitude do intervalo aleatório construído com a variável fulcral da alínea c) ser inferior à amplitude do intervalo aleatório obtido na alínea b).

6. Na secção de enchimento de latas de tinta de um litro, procede-se a medições regulares para evitar grandes disparidades nos conteúdos das latas. A quantidade de tinta (em litros) por lata segue uma distribuição normal com desvio padrão igual a 0.06. Numa amostra de 16 latas observou-se uma média de 0.95 litros.

   (a) Obtenha uma estimativa da máxima verosimilhança para a proporção de latas com mais de um litro de tinta.

   (b) Com base na informação da amostra, afirma-se que a quantidade média de tinta numa lata se situa entre 0.911 e 0.989 litros. Comente, e diga qual a confiança a depositar nessa afirmação.

   (c) Como procederia se quisesse reduzir para metade a amplitude do intervalo de confiança da alínea anterior?

7. Com base numa amostra casual com 16 observações, retirada de uma população normal, construiu-se o seguinte intervalo de confiança para o valor esperado: (7.398; 12.602).

   (a) Sabendo que, com a informação da amostra, se obteve $s = 3.872$, qual o grau de confiança que pode atribuir ao intervalo atrás referido?

   (b) Com base na mesma amostra, construa um intervalo de confiança a 95% para a variância da população.

   (c) Suponha agora que a verdadeira variância é 36. Se pretender construir um intervalo de confiança a 95% para a média de modo que a respectiva amplitude não exceda 6.5, qual será a dimensão mínima da amostra a recolher?

8. O peso das laranjas de um pomar é normalmente distribuído. Com base numa amostra de dimensão 41 obteve-se para a variância do peso das laranjas do pomar o seguinte intervalo de confiança a 90%: (3.19121 ; 6.71225). Sendo a soma dos quadrados das observações igual a 69085, calcule a média da amostra.

9. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ de parâmetros desconhecidos. Pretende-se obter intervalos de confiança a 90% para a média da população com base em amostras de dimensão 31. Calcule a probabilidade de a amplitude do intervalo aleatório não exceder metade do desvio padrão da população.

10. Seja X uma população normal de variância desconhecida de que se extraíram 5 amostras casuais independentes, tendo-se obtido os seguintes resultados:

n_i	6	4	3	7	8
s_i^2	8.0	10.3	9.7	6.8	7.2

Com base nesta informação, construa um intervalo de confiança a 98% para a variância da população.

11. Determine a probabilidade de a amplitude de um intervalo aleatório a 95% para a variância de um universo normal, calculado com base numa amostra de 25 observações, ser superior à própria variância do universo.

12. Uma empresa agrícola tem ao seu serviço dois tractores idênticos. O consumo de combustível por hora de trabalho para qualquer um deles tem distribuição normal de parâmetros desconhecidos. Para efeitos de controlo de consumo obtiveram-se as amostras seguintes: (9.5; 9.8; 9.4; 10.0; 9.9; 9.6; 9.7; 9.5; 9.7) do tractor 1 e (10.0; 9.6; 9.9; 9.7; 10.1) do tractor 2.

    (a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a média de consumos do tractor 1.

    (b) Construa um intervalo de confiança a 90% para o desvio padrão dos consumos do tractor 1.

    (c) Supondo que não há razões para haver diferenças nas variâncias dos consumos dos dois tractores, construa um intervalo de confiança a 95% para a diferença de médias de consumo entre eles.

    (d) Construa agora um intervalo de confiança a 95% para a diferença de médias sem assumir a igualdade das variâncias nos 2 universos.

    (e) Parece-lhe a hipótese de igualdade das variâncias aceitável face aos valores observados? Responda com base num intervalo de confiança a 90%.

13. Pretende-se estimar o intervalo médio de tempo entre duas chegadas consecutivas de veículos a certa estação de serviço, para abastecimento de combustível.

    (a) Construa um intervalo de confiança a 95% para o parâmetro em causa, sabendo que uma amostra casual simples forneceu a seguinte informação: $\sum_{i=1}^{50} x_i = 70$, $s' = 1.5$.

    (b) Retome a alínea anterior mas assumindo agora que o tempo entre chegadas consecutivas segue uma distribuição exponencial.

14. Para testar o grau de receptividade do público a determinado programa, efectuou-se um inquérito nas cidades A e B, tendo-se obtido os seguintes resultados:

	Inquiridos	Opiniões favoráveis
Cidade A	500	300
Cidade B	400	350

    (a) Obtenha intervalos de confiança a 95% para a verdadeira proporção de apreciadores do programa para cada uma das cidades.

    (b) Construa um intervalo de confiança a 95% para a diferença de proporções.

15. Para estudar a proporção de consumidores do produto A foi feito um inquérito a 200 pessoas da cidade R das quais 140 consumiam o produto.

(a) Determine com um grau de confiança de 95% a proporção de consumidores do produto A na cidade R.

(b) Se, na cidade J, numa amostra de 200 pessoas 160 consumirem o produto, poder-se-á afirmar com um grau de confiança de 95% que a proporção de consumidores é superior na cidade J? Justifique.

16. Recolheram-se, de forma independente, duas amostras casuais de dimensão 5 de uma população exponencial de parâmetro θ, tendo-se observado $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2 = 2$. Obtenha uma estimativa por intervalos a 90% para a média da população.

17. Para construir, com base numa amostra casual de dimensão 10, um intervalo de confiança a 95% para a média de uma população normal com variância conhecida, consideram-se duas alternativas: utilizar

$$Z_1 = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad Z_2 = \frac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} \ .$$

Sabendo que para uma amostra de dimensão 10 tirada de um universo com distribuição normal se tem $E[S'] \approx 0.973\sigma$, comente a seguinte afirmação: "A variável fulcral Z_1 fornece, em média, intervalos de menor amplitude, embora seja possível obter um intervalo de confiança de menor amplitude utilizando a variável fulcral Z_2".

18. Seja $X \sim U(0, \theta)$, $\theta > 0$, e uma amostra de dimensão n da mesma.

(a) Mostre que a variável $Z = X_{(n)}/\theta$ pode ser utilizada como variável fulcral na estimação do parâmetro θ.

(b) Sendo $\bar{X}$ a média amostral, refira em que condições se pode afirmar que (T_1, T_2) é um intervalo aleatório a 95% para o parâmetro, com:

$$T_1 = \frac{2\bar{X}}{1 + 1.96/\sqrt{3n}} \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{2\bar{X}}{1 - 1.96/\sqrt{3n}} \ .$$

19. Para estabelecer algumas inferências sobre os consumos semestrais de cimento das empresas de Artefactos e Pré-fabricados na produção de determinado produto, agruparam-se as empresas em quatro classes, consoante as quantidades (em toneladas) de cimento compradas anualmente às cimenteiras:

classe I — [0, 650); classe III — [1200, 3000);
classe II — [650, 1200); classe IV — [3000, 10000].

Recolheram-se amostras casuais em cada classe, tendo-se observado:

Classes	N. empresas na amostra	Consumo médio de cimento	Desvio padrão (s)
I	30	55	24.1
II	31	190	70.2
III	11	350	73.5
IV	8	940	389.3

Admita que o consumo semestral de cimento na produção desse produto tem uma distribuição normal.

(a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a média do consumo semestral de uma empresa da primeira classe de vendas.

(b) Com base num intervalo de confiança a 95% poder-se-á considerar que a dispersão da característica em estudo é semelhante para as empresas das segunda e terceira classes de vendas?

20. Para comparar dois métodos de ensino dividiu-se, aleatoriamente, uma turma de 22 alunos em dois grupos iguais. Cada grupo foi ensinado com um método diferente (método A e método B) e, no fim da formação, foram sujeitos à mesma prova de avaliação. Os resultados da avaliação, numa escala de 0 a 100, foram os seguintes:

$$\begin{array}{ll} \text{Método A:} & \bar{x}_A = 74.8;\ s_A^{'2} = 81.5 \\ \text{Método B:} & \bar{x}_B = 72.1;\ s_B^{'2} = 110.5. \end{array}$$

Admita que as classificações obtidas em cada grupo têm distribuição normal.

(a) Construa um intervalo de confiança a 95% para o quociente das variâncias dos dois grupos.

(b) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, construa um intervalo de confiança a 99% para a diferença de médias. Interprete o resultado obtido.

21. Para se estudar a regularidade de uma dada moeda fizeram-se 500 lançamentos, tendo-se observado 280 'face'. Obtenha uma estimativa por intervalo de confiança, a 95%, para a probabilidade de sair 'face'. O que pode concluir sobre a regularidade da moeda?

22. Com o advento das novas tecnologias de informação são, naturalmente, questionados os métodos tradicionais de ensino. Em experiências realizadas, utilizando metodologias mais apelativas, com um grupo de 64 alunos, observou-se uma taxa de aprovação de 65%, enquanto que, num grupo de igual número de alunos e para as mesmas matérias, mas pelos métodos tradicionais, se obteve uma taxa de aprovação de 50%.

(a) Utilizando um intervalo de confiança adequado, com um nível aproximado de 90%, pode concluir-se que é urgente mudar os métodos de ensino?

(b) Analise em que medida alterações no grau de confiança podem conduzir a opinião diferente.

23. Pretende-se obter uma estimativa para a proporção de utentes dos comboios da linha de Cascais que utilizam também o metropolitano para alcançar o seu destino final. Para tal inquiriram-se, ao acaso, 500 passageiros da referida linha dos quais 320 declararam utilizar também o metropolitano na sua deslocação.

(a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a proporção de passageiros da linha de Cascais que são também utilizadores do metropolitano.

(b) Caso se pretendesse conhecer aquela proporção com uma margem de erro não superior a 2%, para um grau de confiança de 90%, quantos passageiros deveriam ser inquiridos?

24. O número de componentes defeituosos produzidos diariamente por uma máquina é uma variável aleatória com distribuição de Poisson. Em média essa máquina produz dois componentes defeituosos por dia. Com o objectivo de substituir a máquina em causa, foi testada uma nova máquina. Nos 60 dias de teste, registou-se um total de 80 componentes defeituosos produzidos pela nova máquina. Admitindo que o número de componentes defeituosos produzidos diariamente por esta máquina também tem distribuição de Poisson, determine um intervalo de confiança a 95% para o número médio de componentes defeituosos produzidos diariamente por esta máquina.

25. Com o objectivo de avaliar o efeito da dimensão da turma sobre o aproveitamento dos alunos recolheu-se a seguinte informação (amostras casuais de alunos da mesma disciplina):

	Classificação (0-20)					
	< 8	$[8, 10)$	$[10, 12)$	$[12, 14)$	≥ 14	Total
Turmas grandes	12	42	30	11	5	100
Turmas pequenas	4	30	40	21	5	100

(a) Construa um intervalo de confiança a 90% para a nota média dos alunos de turmas pequenas.

(b) Construa um intervalo de confiança a 90% para a diferença na classificação média das duas populações e comente o resultado obtido.

(c) Com base num intervalo de confiança a 90% diga se se pode afirmar que a proporção de alunos com nota positiva é maior nas turmas pequenas?

26. Uma empresa de distribuição de pizas ao estudar o intervalo de tempo (em minutos) entre chegadas de pedidos, obteve, em 50 observações, uma soma de tempos igual a 550 minutos. Admite-se que o tempo entre chegadas de pedidos segue uma distribuição exponencial.

(a) Obtenha uma estimativa de máxima verosimilhança para $P(X > 15)$.

(b) Construa um intervalo de confiança a 95% para o tempo médio entre pedidos, comentando se é razoável ser de 10 minutos esse intervalo de tempo.

27. Os tempos de acesso a uma determinada página da internet, utilizando uma ligação através da rede local (LAN) ou uma ligação ADSL, são variáveis aleatórias com distribuição normal, X e Y, respectivamente. Utilizando a informação recolhidas nas amostras casuais:

LAN	2.1	2.6	2.6	3.4	2.4	1.7	2.2	1.2		
ADSL	3.5	3.9	3.0	2.3	2.1	3.1	3.6	3.0	2.9	3.3

construa um intervalo de confiança a 95% para o tempo médio de acesso por cada um dos sistemas. Construa também um intervalo de confiança a 95% para a diferença de média e diga se é de aceitar que o tempo médio seja o mesmo nos dois sistemas.

28. Numa escola, escolheram-se ao acaso duas turmas (A e B) e retirou-se uma amostra de dimensão 8 de cada uma delas, tendo-se observado as seguintes classificações numa escala de 0 a 100%:

A	64	66	89	77	82	77	80	90
B	56	71	83	65	71	79	67	64

Admite-se que as classificações das turmas são independentes, com distribuição normal.

(a) Construa um intervalo de confiança a 90% para a diferença de médias.

(b) Resolva a mesma questão supondo que as variâncias são desconhecidas e iguais.

SOLUÇÕES

1. a) — b) sol. "óptima": (0.2 ; 0.5); sol aprox: (0.131 ; 0.497) c) sol. "óptima" : (1.401 ; 2.000); sol aprox: (1.262 ; 1.995)
2. a) — b) (0.050 ; 7.221) c) (1.239 ; 1.844) d) (1.254 ; 1.858)
3. 0.7695
4. a) (2.1744 ; 3.8256) b) (2.439 ; 7.741)
5. a) (1.077 ; 2.567) b) (3.070 ; 4.930) c) (2.903 ; 5.097) d) 0.3816
6. a) 0.2023 b) 0.9906 c) 64
7. a) 0.98 b) (8.727 ; 38.307) c) 14
8. 40.996
9. 0.0883
10. (4.359 ; 17.801)
11. 0.7979
12. a) (9.483 ; 9.942) b) (0.194 ; 0.494) c) (-0.4899 ; 0.1949) d) (0.138 ; 3.489)
13. a) (0.984 ; 1.816) b) (1.081 ; 1.886)
14. a) (0.557 ; 0.643) (0.843 ; 0.907) b) (-0.329 ; -0.221)
15. a) (0.636 ; 0.764) b) (-0.1843 ; -0.0157)
16. (1.2735 ; 3.663)

17. —

18. a) — b) —

19. a) (45.848 ; 64.152) b) (0.259 ; 2.152)

20. a) (0.198 ; 2.741) b) (9.766 ; 15.166)

21. (0.5165 ; 0.6035)

22. a) (0.0079 ; 0.2921) b) —

23. a) (0.5979 ; 0.6821) b) 1692

24. (1.041 ; 1.626)

25. a) (10.443 ; 11.237) b) (0.376 ;1.624) c) —

26. a) 0.2557 b) (0.171 ; 0.363)