Cap. 5.- Equações Diferenciais Estocásticas - parte 1

ISEG

Equações Diferenciais Estocásticas

- EDO's determinísticas:

$$f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots\right) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

- EDO de 1^a ordem:

$$\frac{dx(t)}{dt} = b(t, x(t))$$

ou

$$dx(t) = b(t, x(t))\, dt$$

- Versão discreta:

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \approx b(t, x(t))\, \Delta t$$

- Exemplo:
$$\frac{dx(t)}{dt} = cx(t)$$
tem como solução
$$x(t) = x(0)\, e^{ct}.$$

Equações Diferenciais Estocásticas

- EDE na forma diferencial
$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t, \\ X_0 &= X_0 \end{aligned} \tag{1}$$
- $b(t, X_t)$ é o coeficiente de drift ou deriva, $\sigma(t, X_t)$ é o coeficiente de difusão.
- EDE na forma integral:
$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s. \tag{2}$$
- Interpretação "naif"da EDE: $\Delta X_t \approx b(t, X_t)\, \Delta t + \sigma(t, X_t)\, \Delta B_t$. e $\Delta X_t \approx N\left(b(t, X_t)\, \Delta t, (\sigma(t, X_t))^2\, \Delta t\right)$.

Definição

Uma solução da EDE (1) ou (2) é um processo estocástico $\{X_t\}$ *que satisfaz:*

1. $\{X_t\}$ *é um processo adaptado ao mov. Browniano com trajectórias contínuas.*
2. $\mathbb{E}\left[\int_0^T (\sigma(s, X_s))^2 \, ds\right] < \infty.$
3. $\{X_t\}$ *satisfaz a EDE (1) ou (2)*

- As soluções das EDE's também se chamam "difusões"ou "processos de difusão".

Resolução de EDE's pela fórmula de Itô

- **Exemplo**: Movimento Browniano Geométrico. EDE:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \tag{3}$$

ou

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s \tag{4}$$

- Como resolver esta EDE?
- Suponhamos que $X_t = f(t, X_t)$ com $f \in C^{1,2}$. Pela fórmula de Itô:

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) \right) ds + \tag{5}$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) \, dB_s.$$

- Comparando (4) com (5) temos (existe unicidade de representação como processo de Itô)

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) = \mu f(s, B_s), \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) = \sigma f(s, B_s). \tag{7}$$

- Derivando (7) obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, x) = \sigma \frac{\partial f}{\partial x}(s, x) = \sigma^2 f(s, x)$$

e substituindo em (6) temos

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) f(s, x) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, x)$$

- Por separação de variáveis: $f(s, x) = g(s)\, h(x)$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, x) = g'(s)\, h(x)$$

e

$$g'(s) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) g(s)$$

que é uma EDO linear com solução:

$$g(s) = g(0) \exp\left[\left(\mu - -\frac{1}{2}\sigma^2\right) s\right]$$

- Usando (7), obtemos $h'(x) = \sigma h(x)$ e obtemos

$$f(s, x) = f(0, 0) \exp\left[\left(\mu - -\frac{1}{2}\sigma^2\right) s + \sigma x\right].$$

- Conclusão:

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 \exp\left[\left(\mu - -\frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right] \qquad (8)$$

que é o movimento Browniano geométrico.

- Observação: Note que se obteve a solução da EDE, resolvendo uma EDP determinística.

- Verificação de que (8) satisfaz a EDE (3) ou (4).
- Aplicando a fórmula de Itô a $X_t = f(t, B_t)$ com

$$f(t, x) = X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma x\right],$$

obtemos

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) X_s + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s\right] ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s \\ &= X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s \end{aligned}$$

- ou:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

- **Exemplo:** Processo de Ornstein-Uhlenbeck (ou equação de Langevin):
$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t.$$
ou
$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t dB_s.$$
- Nota: na forma discreta teríamos:
$$X_{t+1} = (1+\mu) X_t + \sigma (B_{t+1} - B_t)$$
ou
$$X_{t+1} = \phi X_t + Z_t,$$
com $\phi = 1 + \mu$ e $Z_t \sim N(0, \sigma^2)$. Temos uma série temporal autoregressiva de ordem 1.

- **Exemplo:** Processo de Ornstein-Uhlenbeck (ou equação de Langevin):
- Seja
$$Y_t = e^{-\mu t} X_t$$
ou $Y_t = f(t, X_t)$ com $f(t, x) = e^{-\mu t} x$. Pela fórmula de Itô,
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left(-ce^{-\mu s} X_s + ce^{-\mu s} X_s + \frac{1}{2}\sigma^2 \times 0 \right) ds$$
$$+ \int_0^t \sigma e^{-\mu s} dB_s.$$
- Logo,
$$X_t = e^{\mu t} X_0 + e^{\mu t} \int_0^t \sigma e^{-\mu s} dB_s.$$
- Se X_0 =cte., o processo diz-se de Ornstein-Uhlenbeck.

- **Exemplo:** O movimento Browniano Geométrico (outra vez)
- Seja
$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \tag{9}$$
ou
$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s. \tag{10}$$
- Hipótese:
$$X_t = e^{Z_t}.$$
ou
$$Z_t = \ln (X_t).$$

- Aplicando a fórmula de Itô a $f(X_t) = \ln (X_t)$, obtemos
$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{X_t^2}\right)(dX_t)^2 \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$
- Ou seja:
$$Z_t = Z_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t$$
- e:
$$X_t = X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right].$$

- De forma mais geral, a solução da EDE linear homogénea

$$dX_t = b(t) X_t dt + \sigma(t) X_t dB_t$$

é

$$X_t = X_0 \exp\left[\int_0^t \left(b(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2\right) ds + \int_0^t \sigma(s)\, dB_s\right].$$