Cap. 5.- Equações Diferenciais Estocásticas - parte 2

ISEG

Exercício

- Determine a solução da EDE

$$dX_t = a\left(m - X_t\right)dt + \sigma dB_t,$$
$$X_0 = x.$$

$a, \sigma > 0$ e $m \in \mathbb{R}$. Calcule também a média e a variância de X_t e quando $t \to \infty$, determine a distribuição de X_t (distribuição invariante ou distribuição estacionária).

Exercício

- Considere a EDE

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$
$$X_0 = X_0.$$

a) Supondo que $X_t = f(t, B_t)$, onde f é uma função de classe $C^{1,2}$, aplique a fórmula de Itô e determine a equação diferencial parcial (EDP) satisfeita pela função f.
b) Aplicando o método de separação de variáveis ($f(s,x) = g(s)h(x)$), e considerando a EDP obtida na alínea anterior, determine as equações diferenciais ordinárias (EDO) satisfeitas por g e h.
c) Determine finalmente o processo X_t.

Teorema de existência e unicidade para EDE's

- Sejam $T > 0$, $b(\cdot,\cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma(\cdot,\cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ funções mensuráveis tais que:
1) $\mathbb{E}\left[|Z|^2\right] < \infty$. e Z independente de B.
2) Prop. de crescimento linear

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1 + |x|), \; x \in \mathbb{R}^n, \; t \in [0, T]$$

3) Prop. de Lipschitz

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq D|x-y|, \; x, y \in \mathbb{R}^n, \; t \in [0, T]$$

Então a E.D.E.

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s \qquad (1)$$

tem uma única solução. Existe um único proc. estoc. $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ contínuo, adaptado, que satisfaz (1) e tal que

$$E\left[\int_0^T |X_s|^2\, ds\right] < \infty.$$

Demonstração do teorema de existência e unicidade

- Consideremos o espaço $L^2_{a,T}$ dos processos adaptados à filtração $\mathcal{F}^Z_t := \sigma(Z) \cup \mathcal{F}_t$ tais que $E\left[\int_0^T |X_s|^2\, ds\right] < \infty$.
- Neste espaço, considere-se a norma:

$$\|X\| = \left(\int_0^T e^{-\lambda s} E\left[|X_s|^2\right] ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $\lambda > 2D^2(T+1)$.
- Defina-se o operador $\mathcal{L} : L^2_{a,T} \to L^2_{a,T}$ por:

$$(\mathcal{L}X)_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

Demonstração do teorema de existência e unicidade

- Pela propriedade de crescimento linear de b e σ, o operador $\mathcal{L}$ está bem definido.
- Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela isometria de Itô, temos:

$$E\left[\left|(\mathcal{L}X)_t - (\mathcal{L}Y)_t\right|^2\right] \leq 2E\left[\left(\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds\right)^2\right]$$

$$+ 2E\left[\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right)^2\right]$$

$$\leq 2TE\left[\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))^2\, ds\right] +$$

$$+ 2E\left[\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))^2\, ds\right]$$

Demonstração do teorema de existência e unicidade

- Pela propriedade de Lipschitz, temos:

$$E\left[\left|(\mathcal{L}X)_t - (\mathcal{L}Y)_t\right|^2\right] \leq 2D^2\,(T+1)\,E\left[\int_0^t (X_s - Y_s)^2\,ds\right].$$

- Defina-se $K = 2D^2\,(T+1)$. Multiplicando a desigualdade anterior por $e^{-\lambda t}$ e integrando em $[0, T]$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T e^{-\lambda t} E\left[\left|(\mathcal{L}X)_t - (\mathcal{L}Y)_t\right|^2\right] dt \\
&\leq K \int_0^T e^{-\lambda t} E\left[\int_0^t (X_s - Y_s)^2\,ds\right] dt.
\end{aligned}$$

Trocando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned}
&= K \int_0^T \left[\int_s^T e^{-\lambda t} dt\right] E\left[(X_s - Y_s)^2\right] ds \\
&\leq \frac{K}{\lambda} \int_0^T e^{-\lambda s} E\left[(X_s - Y_s)^2\right] ds
\end{aligned}$$

Demonstração do teorema de existência e unicidade

- Portanto:

$$\|(\mathcal{L}X) - (\mathcal{L}Y)\| \leq \sqrt{\frac{K}{\lambda}}\,\|X - Y\|$$

- E como $\lambda > K$, temos $\sqrt{\frac{K}{\lambda}} < 1$, pelo que operador $\mathcal{L}$ é uma contracção no espaço $L^2_{a,T}$ e pelo teorema do ponto fixo, existe um e só um ponto fixo para $\mathcal{L}$ e esse ponto fixo é precisamente a solução da EDE:

$$(\mathcal{L}X)_t = X_t.$$

- Ver o livro do Oksendal para uma demonstração baseada em aproximações de Picard e na desigualdade de Gronwall.

Exemplos

- O movimento Browniano Geométrico

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right]$$

já sabemos que é a solução da EDE

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \\ S_0 &= S_0. \end{aligned}$$

Esta EDE descreve a evolução do preço de um activo financeiro (com risco) no modelo de Black-Scholes

Exemplo

- Consideremos o modelo de Black-Scholes com coeficientes $\mu(t)$ e $\sigma(t) > 0$ dependentes do tempo:

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t\left(\mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dB_t\right), \\ S_0 &= S_0. \end{aligned}$$

- Determine a solução desta EDE.

Exemplo

- Seja $S_t = \exp(Z_t)$ e $Z_t = \ln(S_t)$. Pela fórmula de Itô com $f(x) = \ln(x)$, temos:

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{1}{S_t}\left(S_t\left(\mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dB_t\right)\right) - \frac{1}{2S_t^2}\left(S_t^2\sigma^2(t)\,dt\right) \\ &= \left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)dt + \sigma(t)\,dB_t. \end{aligned}$$

Pelo que

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds + \int_0^t \sigma(s)\,dB_s.$$

- Portanto,

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds + \int_0^t \sigma(s)\,dB_s\right).$$

Processo de Orsntein-Uhlenbeck com reversão para a média:

$$\begin{aligned} dX_t &= a(m - X_t)\,dt + \sigma dB_t, \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

$a, \sigma > 0$ e $m \in \mathbb{R}$.

- Solução da EDO homogénea associada $dx_t = -ax_t dt$ é $x_t = xe^{-at}$.
- Considere-se a mudança de variáveis $X_t = Y_t e^{-at}$ ou $Y_t = X_t e^{at}$.
- Pela fórmula de Itô aplicada a $f(t, x) = xe^{at}$, temos

$$Y_t = x + m\left(e^{at} - 1\right) + \sigma \int_0^t e^{as} dB_s.$$

Processo de Orsntein-Uhlenbeck com reversão para a média:

- Logo,
$$X_t = m + (x - m)\, e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s.$$
- Este processo é Gaussiano pois um integral estocástico do tipo $\int_0^t f(s)\, dB_s$, onde f é uma função determinística, é um processo Gaussiano.
- Média:
$$E[X_t] = m + (x - m)\, e^{-at}$$

Processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média:

- Covariância: pela isometria de Itô
$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X_t, X_s] &= \sigma^2 e^{-a(t+s)} E\left[\left(\int_0^t e^{ar} dB_r\right)\left(\int_0^s e^{ar} dB_r\right)\right] \\
&= \sigma^2 e^{-a(t+s)} \int_0^{t \wedge s} e^{2ar} dr \\
&= \frac{\sigma^2}{2a}\left(e^{-a|t-s|} - e^{-a(t+s)}\right).
\end{aligned}$$

  Note-se que
$$X_t \sim N\left[m + (x - m)\, e^{-at}, \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)\right].$$

Processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média:

- Quando $t \to \infty$, a distribuição de X_t converge para

$$\nu := N\left[m, \frac{\sigma^2}{2a}\right].$$

que é a distribuição invariante ou estacionária.
- Note-se que se X_0 tem distribuição ν então a distribuição de X_t será a distribuição ν para todo o t.

Aplicações financeiras do processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média:

- Modelo de Vasicek para a taxa de juro:

$$dr_t = a\,(b - r_t)\,dt + \sigma dB_t,$$

com a, b, σ constantes.
- Solução:

$$r_t = b + (r_0 - b)\,e^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dB_s.$$

Aplicações financeiras do processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média:

- Modelo de Black-Scholes com volatilidade estocástica: assume-se que a volatilidade $\sigma(t) = f(Y_t)$ é função de um processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média:

$$dY_t = a(m - Y_t)\,dt + \beta dW_t,$$

com a, m, β constantes e onde $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ é um movimento Browniano.

- A EDE que modela a evolução do preço do activo com risco é

$$dS_t = \mu S_t dt + f(Y_t)\,S_t dB_t$$

onde $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ é um movimento Browniano.e os movimentos Brownianos W_t e B_t podem estar correlacionados, i.e.,

$$E[B_t W_s] = \rho(s \wedge t).$$

Exemplo

- Considere a EDE:

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)\,ds + \int_0^t c(s)\,X_s dB_s,$$

com f e c funções determinísticas e contínuas. Suponha que f satisfaz as condições de Lipschitz e de crescimento linear em x.

- Pelo teorema de existência e unicidade de soluções para EDE's, existe uma solução para a EDE e é única.
- Como obter a solução?

Exemplo

- Considere o "factor integrante"

$$F_t = \exp\left(\int_0^t c\,(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t c\,(s)^2\, ds\right).$$

  Note-se que F_t é solução da EDE se $f = 0$ e $x = 1$.
- Suponha que $X_t = F_t Y_t$ ou que $Y_t = (F_t)^{-1} X_t$. Então, pela fórmula de Itô:

$$dY_t = (F_t)^{-1} f\,(t, F_t Y_t)\, dt$$

  e $Y_0 = x$.
- Esta equação para Y é uma EDO com coeficientes aleatórios (é uma equação diferencial determinística parametrizada por $\omega \in \Omega$).

Exemplo

- Por exemplo, se $f(t,x) = f(t)x$, então temos a eq. dif. ordinária

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t)Y_t$$

  e portanto

$$Y_t = x \exp\left(\int_0^t f\,(s)\, ds\right).$$

  Logo:

$$X_t = x \exp\left(\int_0^t f\,(s)\, ds + \int_0^t c\,(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t c\,(s)^2\, ds\right).$$

Equações Diferenciais estocásticas lineares

- Em geral, uma EDE linear tem a forma:

$$dX_t = (a(t) + b(t) X_t)\, dt + (c(t) + d(t) X_t)\, dB_t,$$
$$X_0 = x,$$

onde a, b, c, d são funções determinísticas contínuas.

- Como obter a solução da EDE?

Equações Diferenciais estocásticas lineares

- Suponha que

$$X_t = U_t V_t, \tag{2}$$

onde

$$\begin{cases} dU_t = b(t) U_t dt + d(t) U_t dB_t, \\ dV_t = \alpha(t)\, dt + \beta(t)\, dB_t. \end{cases}$$

e $U_0 = 1,\ V_0 = x$.

- De exemplo anterior, já sabemos que

$$U_t = \exp\left(\int_0^t b(s)\, ds + \int_0^t d(s)\, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t d(s)^2\, ds \right) \tag{3}$$

Equações Diferenciais estocásticas lineares

- Por outro lado, calculando o diferencial de (2), usando a fórmula de Itô com $f(u, v) = uv$, temos:

$$\begin{aligned} dX_t &= V_t dU_t + U_t dV_t + \frac{1}{2}(dU_t)(dV_t) + \frac{1}{2}(dV_t)(dU_t) \\ &= (b(t)X_t + \alpha(t)U_t + \beta(t)d(t)U_t)\,dt + (d(t)X_t + \beta(t)U_t)\,dB_t. \end{aligned}$$

- Comparando com a EDE inicial para X, temos

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha(t)U_t + \beta(t)d(t)U_t, \\ c(t) &= \beta(t)U_t. \end{aligned}$$

Equações Diferenciais estocásticas lineares

- Logo:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= c(t)U_t^{-1}, \\ \alpha(t) &= [a(t) - c(t)d(t)]\,U_t^{-1}. \end{aligned}$$

- Portanto:

$$X_t = U_t\left(x + \int_0^t [a(s) - c(s)d(s)]\,U_s^{-1}ds + \int_0^t c(s)\,U_s^{-1}dB_s\right),$$

onde U_t é dado por (3).

Equações Diferenciais estocásticas - teorema de existência e unicidade para o caso unidimensional

- No caso unidimensional ($n = 1$), a condição de Lipschitz para o coef. σ no teorema de existência e unicidade de soluções, pode enfraquecer-se se $\sigma(t, x) = \sigma(x)$ (coeficiente de difusão não dependente do tempo).
- Suponha-se que o coef. b satisfaz a condição de Lipschitz e o coef. σ satisfaz a condição:

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|^{\alpha}, \; x, y \in \mathbb{R}, \; t \in [0, T]$$

com $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Então, existe uma única solução para a EDE.
- Por exemplo, a EDE do modelo de taxas de juro de Cox-Ingersoll-Ross:

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t$$
$$r_0 = x,$$

tem uma e só uma solução.

Soluções fortes e fracas

- O problema de obter uma solução de uma EDE pode ser definido de forma diferente:
- Suponhamos que são dados só os coeficientes $b(t, x)$ e $\sigma(t, x)$ e que pretendemos determinar um par de processos estocásticos $\{X_t\}$ e $\{B_t\}$, definidos num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e com uma filtração $\{\mathcal{H}_t\}$ tal que $\{B_t\}$ é um $\{\mathcal{H}_t\}$-movimento Browniano e $\{X_t\}$ e $\{B_t\}$ satisfazem a EDE

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s \tag{4}$$

nesse espaço de probabilidade.
Nesse caso, diz-se que $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{H}_t\}, \{X_t\}, \{B_t\})$ é uma solução fraca ("weak solution") de (4)

Soluções fortes e fracas

- Podem demonstrar-se os seguintes resultados (para o leitor interessado, ver: Karatzas and Shreve: "Brownian motion and Stochastic Calculus"):
- Toda a solução forte é uma solução fraca.
- Diz-se que uma EDE satisfaz a propriedade de unicidade fraca se duas soluções fracas têm a mesma distribuição (mesmas distribuições dimensionalmente finitas ou fidis). Se os coeficientes satisfazem as condições do teorema de existência e unicidade, então a EDE satisfaz a propriedade de unicidade fraca.
- A existência de de soluções fracas pode garantir-se supondo apenas que os coeficientes $b(t, x)$ e $\sigma(t, x)$ são funções contínuas e limitadas.

Soluções fortes e fracas

- Exemplo: A EDE de Tanaka:

$$\begin{aligned} dX_t &= \operatorname{sign}(X_t)\, dB_t, \\ X_0 &= 0, \end{aligned}$$

onde

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} +1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Note que $\operatorname{sign}(x)$ não satisfaz a condição de Lipschitz (nem sequer é contínua em 0). Logo, não se pode aplicar o teorema de existência e unicidade neste caso.

- Pode mostrar-se que não existe nenhuma solução (no sentido forte) para esta EDE, mas existe uma solução fraca (que é única) - este exemplo é explorado no livro do Oksendal.

Exercício

- Considere a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dX(t) = 4e^{2t}\, dt + t\, dW(t) \text{ com } X(0) = 10.$$

$$dZ(t) = \left(t^2 + 3\sin t\right)\, dt + 4\, t\, dW(t),\ \ com\ Z(0) = 5.$$

a) Escreva a equação dada na forma integral.
b) Deduza a respectiva solução.

Exercício

- O modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR) para o processo de taxa de juro $R(t)$ é

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))\, dt + \sigma\sqrt{R(t)}\, dW(t),$$

onde α, β e σ são constantes positivas. A equação CIR não tem solução fechada. Contudo, podem determinar-se o valor médio e a variância de $R(t)$.

a) Calcule o valor médio de $R(t)$. (Sugestão: Seja $X(t) = e^{\beta t}R(t)$. Use a função $f(t,x) = e^{\beta t}x$, aplique a fórmula de Itô na forma diferencial, integre e aplique o operador esperança).
b) Calcule a variância de $R(t)$. (Sugestão: Calcule $d\left(X^2(t)\right)$ aplicando a fórmula de Itô na forma diferencial, integre e aplique o operador esperança).
c) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} Var\left(R(t)\right)$.