Cap. 7.- Teorema de Girsanov

ISEG

Teorema de Girsanov - o que é?

- O teorema de Girsanov diz-nos, na sua versão mais simples, que o movimento Browniano com deriva: $\widetilde{B}_t = B_t + \lambda t$, pode ser visto como um movimento Browniano standard se mudarmos a medida de probabilidade.
- Em termos mais gerais, o teorema de Girsanov diz-nos que se mudarmos o coeficiente de deriva de um processo de Itô então a lei do processo não muda radicalmente..A lei do novo processo de Itô será absolutamente contínua relativamente à lei do processo original e podemos calcular explicitamente a derivada de Radon-Nikodym.

Processos de Itô

- Seja $L_{a,T}$ o espaço de processos u.adaptados e progressivamente mensuráveis tais que $P\left[\int_0^T u_t^2 dt < \infty\right] = 1$.
- Defina-se $L^1_{a,T}$ como o espaço de processos v adaptados e progressivamente mensuráveis tais que $P\left[\int_0^T |v_t|\, dt < \infty\right] = 1$.
- Um processo contínuo e adaptado $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ diz-se um processo de Itô se verifica:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds, \tag{1}$$

onde $u \in L_{a,T}$ e $v \in L^1_{a,T}$.

- Deriva do processo de Itô: $\int_0^t v_s ds$ ou mais simplesmente $\{v_t\}$.

Mudanças de medida de probabilidade

- Suponha que $L \geq 0$ é uma variável aleatória de média 1 definida no esp. de probab. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Então

$$Q(A) = E\left[\mathbf{1}_A L\right]$$

define uma nova medida de probabilidade. É claro que $Q(\Omega) = E[L] = 1$.

- $Q(A) = E\left[\mathbf{1}_A L\right]$ é equivalente a

$$\int_\Omega \mathbf{1}_A dQ = \int_\Omega \mathbf{1}_A L dP.$$

- Diz-se que L é a densidade de Q relativamente a P e escreve-se

$$\frac{dQ}{dP} = L.$$

- L também se diz a derivada de Radon-Nikodym de Q relativamente a P.

Mudanças de medida de probabilidade

- O valor esperado de uma v.a. X definida no esp. de probab. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ calcula-se pela fórmula
$$E_Q[X] = E[XL].$$
- A medida de probabilidade Q é absolutamente contínua relativamente a P, o que significa que
$$P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0.$$
- Se a variável aleatória L é estritamente positiva $(L > 0)$, as probabilidades P e Q são equivalentes (ou seja, mutuamente absolutamente contínuas), o que significa que
$$P(A) = 0 \Longleftrightarrow Q(A) = 0.$$

Exemplo - versão simples do Teorema de Girsanov

- Seja X uma v.a. com distribuição $N(m, \sigma^2)$. Existe uma medida de probab. Q em relação à qual X tenha distribuição $N(0, \sigma^2)$?
- Considere a v.a.
$$L = \exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}X + \frac{m^2}{2\sigma^2}\right).$$
É fácil verificar que $E[L] = 1$. Basta considerar a densidade da distribuição normal $N(m, \sigma^2)$ e temos que
$$E[L] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}x + \frac{m^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx = 1.$$

Exemplo - versão simples do Teorema de Girsanov

- Suponha que a medida de probabilidade Q tem densidade L em relação a P. Então, no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, a v.a. X tem a função característica:

$$\begin{aligned} E_Q\left[e^{itX}\right] &= E\left[e^{itX}L\right] \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(itx - \frac{m}{\sigma^2}x + \frac{m^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(itx - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \end{aligned}$$

- Conclusão: X tem distribuição $N\left(0, \sigma^2\right)$ - (para a forma geral da função característica de uma distribuição normal ver, por exemplo, o apêndice do Oksendal sobre v.a. normais).

Teorema de Girsanov - 1^a versão

- Seja $\{B_t, t \in [0, T]\}$ um mov. Browniano.
- Fixemos um número real λ e consideremos a martingala:

$$L_t = \exp\left(-\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right). \tag{2}$$

- Exercício (TPC): Prove que o processo est. $\{L_t, t \in [0, T]\}$ é uma martingala positiva com esperança 1 e que satisfaz a EDE:

$$L_t = 1 - \int_0^t \lambda L_s dB_s$$

Teorema de Girsanov - 1^a versão

- A v.a. $L_T = \exp\left(-\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2}T\right)$ é uma densidade no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, pela qual se define a nova medida de probabilidade:
$$Q(A) = E[\mathbf{1}_A L_T],$$
para qualquer $A \in \mathcal{F}_T$.
- Como $\{L_t, t \in [0, T]\}$ é uma martingala, então a v.a. $L_t = \exp\left(-\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$ é uma densidade no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ e neste espaço a medida de probab. Q tem precisamente a densidade L_t.
- De facto, se $A \in \mathcal{F}_t$, temos que:
$$\begin{aligned} Q(A) &= E[\mathbf{1}_A L_T] = E[E[\mathbf{1}_A L_T | \mathcal{F}_t]] \\ &= E[\mathbf{1}_A E[L_T | \mathcal{F}_t]] = E[\mathbf{1}_A L_t], \end{aligned}$$
onde se aplicaram as propriedades da esperança condicionada e a propriedade de martingala de $\{L_t, t \in [0, T]\}$.

Teorema de Girsanov - 1^a versão

Teorema

(Teorema de Girsanov I): No espaço de probab. $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, onde Q é definida por $Q(A) = E[\mathbf{1}_A L_T]$, o processo estocástico
$$\widetilde{B}_t = B_t + \lambda t$$
é um movimento Browniano.

Lema técnico

- Antes de provar o teorema de Girsanov, precisamos do seguinte Lema:

Lema

Suponha que X é uma v.a. real e que $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra tal que:

$$E\left[e^{iuX}|\mathcal{G}\right] = e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}.$$

Então, a variável aleatória X é independente da σ-álgebra $\mathcal{G}$ e tem uma dist. normal $N\left(0,\sigma^2\right)$.

Ver a demonstração do Lema no texto "Stochastic Calculus"de Nualart, págs. 63-64.

Demostração do teorema de Girsanov

Demonstração.

É suficiente mostrar que em $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, o incremento $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s$, com $s < t \leq T$, é independente de $\mathcal{F}_s$ e tem distribuição normal $N(0, t-s)$. Tendo em conta o Lema anterior, isto é consequência da seguinte relação:

$$E_Q\left[\mathbf{1}_A e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\right] = Q(A)\, e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}, \tag{3}$$

para todo $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$ e $u \in \mathbb{R}$. De facto, se (3) se verificar então, por definição da esperança condicionada e pelo Lema anterior, temos que $\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)$ é independente de $\mathcal{F}_s$ e tem distribuição normal $N(0, t-s)$. Só falta provar a igualdade (3). $\square$

Demostração do teorema de Girsanov

Demonstração.

(continuação) Prova da igualdade (3):

$$
\begin{aligned}
E_Q\left[\mathbf{1}_A e^{iu\left(\widetilde{B}_t-\widetilde{B}_s\right)}\right] &= E\left[\mathbf{1}_A e^{iu\left(\widetilde{B}_t-\widetilde{B}_s\right)} L_t\right] \\
&= E\left[\mathbf{1}_A e^{iu(B_t-B_s)+iu\lambda(t-s)-\lambda(B_t-B_s)-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} L_s\right] \\
&= E\left[\mathbf{1}_A L_s\right] E\left[e^{(iu-\lambda)(B_t-B_s)}\right] e^{iu\lambda(t-s)-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \\
&= Q(A) e^{\frac{(iu-\lambda)^2}{2}(t-s)+iu\lambda(t-s)-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \\
&= Q(A) e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)},
\end{aligned}
$$

onde se usou a definição de E_Q e de L_t, a independência de $\left(B_t - B_s\right)$ de L_s e A e a definição de Q. $\square$

Teorema de Girsanov - 2^a versão

Teorema

(Teorema de Girsanov II): Seja $\{\theta_t, t \in [0, T]\}$ um processo estocástico adaptado que satisfaz a condição de Novikov:

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt\right)\right] < \infty. \tag{4}$$

Então, o processo estocástico

$$\widetilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$$

é um movimento Browniano.relativamente à medida Q definida por $Q(A) = E\left[\mathbf{1}_A L_T\right]$, onde

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

- Note-se que L_t satisfaz a EDE linear

$$L_t = 1 - \int_0^t \theta_s L_s dB_s.$$

- Para que o processo L_t seja uma densidade é necessário que $E[L_t] = 1$ e a condição (4) é suficiente para garantir que $E[L_t] = 1$.
- A 2^a versão do teorema de Girsanov generaliza a 1^a versão. Note-se que com o $\theta_t \equiv \lambda$, voltamos a obter a 1^a versão do teorema de Girsanov.