Teorema da representação de martingala

ISEG

Teorema da representação integral de Itô

- Seja $u \in L^2_{a,T}$ (u adaptado, progressivamente mensurável e de quadrado integrável) e seja

$$M_t = \mathbb{E}\left[M_0\right] + \int_0^t u_s dB_s. \tag{1}$$

- Já sabemos que M_t é uma $\mathcal{F}_t$-martingala.
- Vamos mostrar que qualquer martingala de quadrado integrável é da forma (1).

Teorema da representação integral de Itô

Teorema

(Repres. integral de Itô): Seja $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Então existe um e só um processo $u \in L^2_{a,T}$ tal que

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^t u_s dB_s. \tag{2}$$

Prova: Vamos dividir a prova em 3 partes:

1. Supor que

$$F = \exp\left(\int_0^T h(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T h(s)^2\, ds\right), \tag{3}$$

com h determinística e $\int_0^T h(s)^2\, ds < \infty$.

Prova do teorema da representação integral

Apliquemos a fórmula de Itô a $f(x) = e^x$,
$X_t = \int_0^t h(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2\, ds$ e $Y_t = f(X_t)$.
Então

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t\left(h(t)\, dB_t - \frac{1}{2}h(t)^2\, dt\right) + \frac{1}{2}Y_t\left(h(t)\, dB_t\right)^2 \\ &= Y_t h(t)\, dB_t. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s h(s)\, dB_s.$$

Conclusão:

$$\begin{aligned} F = Y_T &= 1 + \int_0^T Y_s h(s)\, dB_s \\ &= \mathbb{E}[F] + \int_0^T Y_s h(s)\, dB_s \end{aligned}$$

Note-se que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (Y_s h(s))^2 \, ds\right] < \infty,$$

pois $\mathbb{E}\left[Y_t^2\right] = \exp\left(\int_0^t h(u)^2 \, du\right) < \infty$. Logo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T (Y_s h(s))^2 \, ds\right] &\leq \int_0^T \exp\left(\int_0^s h(u)^2 \, du\right) h(s)^2 \, ds \\ &\leq \exp\left(\int_0^T h(u)^2 \, du\right) \int_0^T h(s)^2 \, ds.\end{aligned}$$

2 A representação (2) também é válida (por linearidade) para combinações lineares de v.a. da forma (3).
No caso geral, $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ pode ser aproximada (em média quadrática) por sucessão $\{F_n\}$ de combinações lineares de v.a. da forma (3) ver Oksendal (lema 4.3.2). Então:

$$F_n = \mathbb{E}[F_n] + \int_0^t u_s^{(n)} dB_s.$$

Pela isometria do integral de Itô, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(F_n - F_m)^2\right] &= (\mathbb{E}[F_n - F_m])^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(u_s^{(n)} - u_s^{(m)}\right)^2 ds\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(u_s^{(n)} - u_s^{(m)}\right)^2 ds\right]\end{aligned}$$

$\{F_n\}$ é sucessão de Cauchy em $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Logo

$$\mathbb{E}\left[(F_n - F_m)^2\right] \longrightarrow 0 \text{ qdo. } n, m \to \infty.$$

E portanto:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(u_s^{(n)} - u_s^{(m)}\right)^2 ds\right] \longrightarrow 0 \text{ qdo. } n, m \to \infty.$$

Logo $\left\{u^{(n)}\right\}$ é sucessão de Cauchy em $L^2([0, T] \times \Omega)$. Como este é um espaço completo, temos que $u^{(n)} \to u$ em $L^2([0, T] \times \Omega)$.
O processo u é adaptado pois $u^{(n)} \in L^2_{a,T}$ e existe uma subsucessão de $\left\{u^{(n)}(t, \omega)\right\}$ convergente para $u(t, \omega)$ p.q.t. $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$. Logo $u(t, \cdot)$ é $\mathcal{F}_t$-mensurável p.q.t. t. Modificando este processo u num conjunto em t de medida nula obtemos que u é adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$.

Temos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[(F_n - F)^2\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}[F_n] + \int_0^T u_s^{(n)} dB_s - F\right)^2 = 0.$$

Por outro lado, pela isometria de Itô, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}[F_n] - \mathbb{E}[F]\right)^2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(u_s^{(n)} - u_s\right) dB_s\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \left(u_s^{(n)} - u_s\right)^2 ds = 0.$$

E portanto $F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T u_s dB_s$.

3 Unicidade: Suponha que $u^{(1)}$ e $u^{(2)} \in L^2_{a,T}$ e

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T u_s^{(1)} dB_s = \mathbb{E}[F] + \int_0^T u_s^{(2)} dB_s.$$

Pela isometria de Itô:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left(u_s^{(1)} - u_s^{(2)}\right) dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(u_s^{(1)} - u_s^{(2)}\right)^2 ds\right] = 0$$

e portanto:

$$u^{(1)}(t,\omega) = u(t,\omega)^{(2)} \quad \text{p.q.t. } (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega.$$

E está terminada a prova. $\square$

Teorema da representação de martingala

Teorema

(Teor. de repres. de martingala): Suponha que $\{M_t, t \in [0,T]\}$ é uma $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala e que $\mathbb{E}[M_T^2] < \infty$. Então existe um e só um processo $u \in L^2_{a,T}$ tal que

$$M_t = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t u_s dB_s \qquad \forall t \in [0,T].$$

Prova: Aplica-se o teorema da representação integral de Itô a $F = M_T$. Portanto $\exists^1 u \in L^2_{a,T}$ tal que

$$M_T = \mathbb{E}[M_T] + \int_0^T u_s dB_s.$$

Como $\{M_t, t \in [0, T]\}$ é martingala, $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$ e

$$\begin{aligned} M_t &= \mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_T]|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}\left[\int_0^T u_s dB_s|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t u_s dB_s. \end{aligned}$$

onde se usou a propriedade de martingala do integral estocástico indefinido. $\square$

Exemplo: Seja $F = B_T^3$. Qual a representação integral de Itô desta v.a.? Pela fórmula de Itô (aplicada a $f(x) = x^3$ e $B_T^3 = f(B_t)$), temos:

$$B_T^3 = \int_0^T 3B_t^2 dB_t + 3\int_0^T B_t dt.$$

Integrando por partes, temos

$$\int_0^T B_t dt = TB_T - \int_0^T t dB_t = \int_0^T (T-t)\, dB_t.$$

Logo

$$F = B_T^3 = \int_0^T 3\left[B_t^2 + (T-t)\right] dB_t. \tag{4}$$

E como $\mathbb{E}\left[B_T^3\right] = 0$ (pois $B_T \sim N(0, T)$). a representação integral é (4).

Exemplo: Qual o processo u tal que
$\int_0^T tB_t^2 dt - \frac{T^2}{2} B_T^2 = -\frac{T^3}{6} + \int_0^T u_t dB_t$?
Aplicando a fórmula de Itô a $X_t = f(t, B_t) = t^2 B_t^2$, com $f(t,x) = t^2 x^2$, temos:

$$T^2 B_T^2 = \int_0^T 2tB_t^2 dt + \int_0^T 2t^2 B_t dB_t + \int_0^T t^2 dt.$$

Daqui resulta que:

$$\int_0^T tB_t^2 dt - \frac{T^2}{2} B_T^2 = -\frac{T^3}{6} - \int_0^T t^2 B_t dB_t$$

e portanto

$$u_t = -t^2 B_t.$$

Note-se que $\mathbb{E}\left[\int_0^T tB_t^2 dt - \frac{T^2}{2} B_T^2\right] = -\frac{T^3}{6}$.

Em geral, a fórmula de integração por partes é a seguinte:

Teorema

(integração por partes): Suponha que $f(s)$ é uma função determinística, contínua e de classe C^1. Então, temos:

$$\int_0^t f(s)\, dB_s = f(t)\, B_t - \int_0^t f'(s)\, B_s ds.$$

Pode-se provar aplicando a fórmula de Itô a $g(t,x) = f(t)\, x$. Ou seja:

$$f(t)\, B_t = \int_0^t f'(s)\, B_s ds + \int_0^t f(s)\, dB_s.$$