Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2010/2011
Época de Recurso: 25 de Janeiro de 2011
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. (a) Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

(b) Sendo $A=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{1}{|x^2-1|}\geq\frac{1}{3}\right\}$, calcule o interior de A, a fronteira de A e indique, justificando, se A é um conjunto compacto.

(4,0) 2. (a) Calcule $\lim\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$.

(b) Calcule a área da figura plana contida no 1º quadrante e limitada pelos gráficos das funções $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$ e $h(x)=4x$.

(4,5) 3. Considere uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{x-1}t^2e^t\,dt & \text{se } x\leq 1\\ (x-1)^2\ln(x-1) & \text{se } x>1\end{cases}$$

(a) Calcule $f(0)$.

(b) A função f é diferenciável em $x=1$? Justifique.

(c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists c\in]1,2[:\ f'(c)=0.$$

(2,5) 4. Prove, utilizando o teorema de Lagrange, que, para $0<a\leq b$, se tem

$$\frac{b-a}{b}\leq\ln\frac{b}{a}\leq\frac{b-a}{a}.$$

(2,5) 5. Dado $\alpha>0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^4-1}{\sqrt[3]{(x-1)^\alpha}(x^3+3x+5)}dx.$$

(2,5) 6. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ para a qual existem e são finitos os limites $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Sendo $A=\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)=x\}$, prove que $A\neq\emptyset$.