Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2007/2008
Época Normal: 16 de Janeiro de 2008
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. Considere os conjuntos $A = \{1 + (-1)^n + \frac{(-1)^n}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 5x \leq -6\}$.

(a) Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de A e, caso existam, o máximo e o mínimo de A.

(b) Calcule o conjunto dos pontos de acumulação de A, o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cap B$ e o interior de $A \cup B$.

(3,0) 2. (a) Calcule a área da figura plana limitada pelas rectas $x = 0$, $x = \pi$ e pelos gráficos das funções f e g, tais que $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$.

(b) Calcule a primitiva da função $f(x) = x^2 \ln(x)$ que se anula no ponto $x = 1$.

(5,0) 3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{(x^2+x+1)} e^{-t}dt - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{a \ln(1 + x^2)}{x} + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Indique, justificando, para que valores de a e b se tem $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Calcule os valores de a e b de forma a que f seja diferenciável no ponto $x = 0$.

(c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^- \; x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

(3,0) 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $f(a) = f(b) = 0$. Considere a função g definida no mesmo intervalo tal que $g(x) = f(x)e^{-3x}$.

(a) É possível aplicar o teorema de Rolle à função g no intervalo $[a, b]$? Justifique.

(b) Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 3f(c)$.

(2,5) 5. Estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral impróprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^{2\alpha} + x^\alpha}} dx.$$

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, os valores de $f(x)$ e de $f'(x)$ são negativos. Considere a função g definida em $\mathbb{R}$ da seguinte forma

$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)dt.$$

Estude g quanto à monotonia e indique, justificando, o sentido da concavidade do gráfico de g.