Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

Análise Matemática I

2009/2010 (2º Semestre)
Época normal: 31 de Maio de 2010

Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as respostas que apresentar

1. **(3 valores)** Calcule os seguintes limites, caso existam:

$$\text{(a)} \lim \frac{n^2 + 2^{1-n}}{(3-2n)^2}; \qquad \text{(b)} \lim \left(\ln(1 - \cos \frac{1}{n}) - \ln \sin \frac{1}{n^2} \right).$$

2. **(2 valores)** Considere uma sucessão que verifique

$$a_{2n} \geq 0, \quad a_{2n+1} \leq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prove que a_n é convergente se e só se $\lim(a_n - a_{n+1}) = 0$. Nesse caso, qual é o limite de a_n?

3. **(5 valores)** Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x^4), & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Mostre que f é derivavel em todo o seu domínio e determine a função $f'(x)$;
   (b) Estude a função $x \mapsto f'(x)$ quanto à continuidade.
   (c) Represente graficamente a função f.

4. **(3 valores)** Calcule os integrais

$$\text{(a)} \int_0^1 x^2 e^{2x^3+1}\, dx, \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi^3} \sin \sqrt[3]{x}\, dx.$$

5. **(3 valores)** Estude a convergência do integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sin^2 x + x^{6\alpha}}\, dx$$

em função do valor do parâmetro α.

6. **(4 valores)** Seja $f : [0, +\infty[\mapsto]0, +\infty[$ uma função contínua. Suponha que o integral $\int_0^{+\infty} x f(x^2) dx$ é convergente, e considere a função

$$G(x) = \int_x^{x^2} t f(t^2) dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Mostre que $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$
   (b) Mostre que a função G admite máximo e mínimo globais em $\mathbb{R}$.
   (c) Mostre que o ponto $x = 0$ é ponto crítico de G mas não é extremante local.