

Análise Matemática I

2009/2010 (2º Semestre)

Época de recurso: 24 de Junho de 2010

Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as respostas que apresentar

1. (3 valores) Calcule os seguintes limites, caso existam:

(a) $\lim \left(\sqrt{n(n+1)} - n \right)$; (b) $\lim (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$, com $0 \leq a \leq b$.

2. (4 valores) Considere a função

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

- (a) Determine o domínio de f .
(b) Faça o estudo da função e represente-a graficamente.

3. (3 valores) Considere uma função $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$, contínua e derivável, tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c \in [0, +\infty].$$

Mostre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = c$.

4. (4 valores) Calcule os integrais

(a) $\int_0^\pi e^{\sin x} \cos x \, dx$, (b) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$.

5. (3 valores) Estude a convergência do integral

$$\int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{x^\alpha + 1}{x^\alpha + 2} \right) \, dx$$

em função do valor do parâmetro α .

6. (3 valores) Sejam $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, uma função contínua, $g : [a, b] \mapsto [0, +\infty[$, uma função integrável.

Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$