

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

**Análise Matemática I**

2008/2009 (2º Semestre)

Época de recurso: 25 de Junho de 2009

Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as respostas que apresentar

1. **(3 valores)** Calcule os seguintes limites, caso existam:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\ln n}; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2+1}.$$

2. **(2 valores)** Seja  $a_n$  uma sucessão real, e considere a sucessão  $b_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ .

(a) Suponha que  $a_n$  é uma sucessão limitada. Mostre que então  $b_n$  é também limitada.

(b) Prove que se  $a_n$  for convergente, então  $b_n$  é convergente e verifica  $\lim b_n = \lim a_n$ .

3. **(3 valores)** Seja  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que  $f$  é derivável em todo o seu domínio e determine a função  $f'(x)$ ;

(b) Mostre que  $f$  admite derivadas de qualquer ordem em todos os pontos de  $\mathbb{R}$ .

4. **(3 valores)** Considere a função

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

(a) Determine o domínio de  $f$ .

(b) Faça o estudo da função e represente-a graficamente.

5. **(3 valores)** Calcule os integrais

$$(a) \int_2^3 \frac{1}{x(\ln x)^{17}} dx, \quad (b) \int_0^\pi \sin(nx) \cos(mx) dx, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

6. **(3 valores)** Considere a função  $F : ]0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$ , definida por

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}} dt$$

(a) Mostre que  $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$ ,  $\forall x > 0$ ;

(b) Determine todos os zeros de  $F$ .

7. **(3 valores)** Estude a convergência do integral

$$\int_0^{+\infty} \sin \frac{1}{1+x^\alpha} dx$$

em função do valor do parâmetro  $\alpha$ .