

Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1º Semestre 2010/2011
Época Normal: 6 de Janeiro de 2011
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : \ln(x^2 + 1) - \ln 3 > 0\}$ e $B = \{\frac{1}{n} + \cos(n\pi) : n \in \mathbb{N}\}$.

- (a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.
- (b) Indique o supremo, ínfimo, máximo e mínimo, caso existam, do conjunto B .
- (c) Calcule o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e de B .

(4,0) 2. (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

(b) Determine a função $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que verifica $f(0) = f'(0) = 1$ e $f''(x) = \frac{1}{x+1}$, para $x > -1$.

(4,5) 3. Dado $a \in \mathbb{R}$ considere-se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{(\sin^2 x)} e^t dt & \text{se } x \leq 0 \\ a + \arctan(e^x + e^{-x} - 1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Determine, caso exista, um valor para $a \in \mathbb{R}$ de forma a que $f \in C^0(\mathbb{R})$.
- (b) Para o valor de a encontrado na alínea anterior f é diferenciável em $x = 0$?
- (c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

(2,5) 4. Seja g uma função contínua em \mathbb{R} e considere f uma função, tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 + xg(x).$$

Prove que f é diferenciável em $x = 0$ (note que nada sabe sobre a diferenciabilidade de g).

(2,5) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α , a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x^\alpha|}{\sqrt{x^4 + x^3}} dx.$$

(2,5) 6. Seja $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]0, 1[$ e tal que, para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$,

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n+2}\right).$$

Supondo que existe $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ indique, **justificando**, o valor desse limite.