INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2011/2012 - 2º Semestre
Exame em Época Normal, 12 de Junho de 2012 Duração: 2 horas

Nome: ____________________

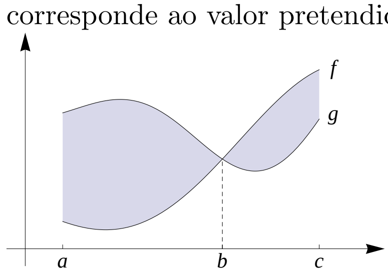
Nº de Aluno: ________ Curso: ________________ Classificação: ________

Parte I: Perguntas de escolha múltipla (60 pontos)
Cada resposta correcta vale 15 pontos e cada resposta incorrecta é penalizada em 5 pontos. A cotação mínima na primeira parte é de zero pontos.

1. Considere uma função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, contínua no intervalo $[0, 1]$ e com derivadas de todas as ordens em $]0, 1[$. Considere ainda $c \in]0, 1[$. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira** ? | 15 pts

- ☐ Se $f(0) \cdot f(1) > 0$, a função f não pode tomar o valor 0.
- ☐ Se f for estritamente crescente, o máximo absoluto é atingido em $x = 0$.
- ✔ Se f for convexa e $f'(c) = 0$, c é um minimizante global.
- ☐ Se $f'(c) = 0$, então c é maximizante de f.

2. Suponha que pretende calcular a área a sombreado na figura. Qual dos integrais seguintes corresponde ao valor pretendido ? | 15 pts



- ✔ $\int_a^c |f(x) - g(x)|\, dx$
- ☐ $\int_a^c (f(x) - g(x))\, dx$
- ☐ $\int_a^c f(x)\, dx + \int_b^c g(x)\, dx$
- ☐ $\int_a^c f(x)\, dx$

3. Considere a série $\sum_{n \geq 0} (\alpha x)^n$. Sabendo que a série é convergente quando $x = 3$, podemos afirmar que: | 15 pts

☐ $\alpha = 0$ ☐ $\alpha = 3$ ☐ $\alpha > 1/3$ ✔ $|\alpha| < 1/3$

4. Considere o sistema linear $A\vec{x} = \vec{b}$ em que A é uma matriz quadrada de ordem n e $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira** ? | 15 pts

- ☐ Se $|A| = 0$ então o sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ é impossível.
- ☐ Se o sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ for possível então $|A| \neq 0$.
- ✔ Se $|A| \neq 0$, a única solução do sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ é $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.
- ☐ O sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ pode ser impossível.

Parte II: Perguntas de desenvolvimento (140 pontos)
Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Considere o sistema linear $A\vec{x} = \vec{b}$, onde

40 pts

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & 2 & 2\alpha \\ 3 & 3 & 4\alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Classifique este sistema em função dos valores dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, indicando nos casos adequados o número de graus de liberdade. (20 pts)

Solução: Vamos proceder à condensação da matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha & 1 \\ 2 & 2 & 2\alpha & 0 \\ 3 & 3 & 4\alpha & \beta \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & \alpha & \beta - 3 \end{array}\right) \underset{L_3 - \frac{3}{2}L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

Uma vez que apenas foram realizadas operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada $A|b$, o sistema inicial é equivalente ao que obtivémos após condensação. Assim:

- Se $\alpha \neq 0$ então $r(A) = r(A|b) = 3$, pelo que o sistema é possível e determinado
- Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ então $r(A) = 2, r(A|b) = 3 \neq r(A)$, pelo que o sistema é impossível.
- Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ então $r(A) = r(A|b) = 2$ pelo que o sistema é possível mas indeterminado, com $3 - 2 = 1$ graus de liberdade.

(b) Determine em que condições o segundo membro do sistema linear é ortogonal ao vetor definido pela terceira coluna de A. (10 pts)

Solução: Dois vetores são ortogonais se e só se o seu produto interno (ou produto escalar) for nulo. Ora,

$$\begin{aligned}(\alpha, 2\alpha, 4\alpha) \cdot (1, 0, \beta) = 0 &\Leftrightarrow \alpha(1, 2, 4) \cdot (1, 0, \beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha(1 + 0 + 4\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Concluímos então que os vetores mencionados são ortogonais se $\alpha = 0$ ou $\beta = -\frac{1}{4}$.

(c) Considere $\alpha = \beta = 1$ e calcule x_2 usando a regra de Cramer.(10 pts)

Solução: Começamos por notar que podemos usar o sistema condensado obtido na alínea (a), já que este é equivalente ao inicial. Assim, segundo a regra de Cramer,

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = -1.$$

2. Demonstre que se A for uma matriz invertível de ordem n então a sua matriz transposta A' é invertível e tem-se $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

10 pts

Solução: Sendo A uma matriz invertível de ordem n temos que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Sendo iguais as três matrizes que figuram na equação anterior, o mesmo acontece com as suas transpostas, isto é,

$$(AA^{-1})' = (A^{-1}A)' = I' \Rightarrow (A^{-1})'A' = A'(A^{-1})' = I.$$

Vemos deste modo que a matriz $(A^{-1})'$ verifica as condições para ser a (única) inversa de A', pelo que concluímos que A' é invertível e a sua inversa é precisamente dada por $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

3. Considere a função $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}+1, & x \geq 0 \\ \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$.

40 pts

(a) Determine o domínio de f e discuta a sua continuidade.(10 pts)

Solução: As expressões apresentadas para f nos casos $x \geq 0$ e $x < 0$ permitem sempre calcular de forma única o respectivo valor, pelo que o domínio de f é o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais. Relativamente à continuidade, a mesma está assegurada para $x < 0$ (f é neste caso a função exponencial) e para $x > 0$ (f é soma de uma constante com o produto de duas funções contínuas). Resta verificar o que sucede quando $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (xe^{-x}+1) = 1 = f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1$$

Assim, como verificámos que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\to 0^-} f(x) = f(0)$, concluímos que f também é contínua quando $x = 0$, pelo que é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Utilizando a definição, mostre que f tem derivada no ponto $x = 0$. (10 pts)

Solução:

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{he^{-h}+1-1}{h} = \lim_{h\to 0} e^{-h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^h}{1} = 1$$

Como verificámos que f tem derivada à esquerda e à direita no ponto $x = 0$ e o seu valor coincide, concluímos que f tem derivada no ponto zero e que $f'(0) = 1$.

(c) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de f. (10 pts)

Solução: Como $f'(0) \neq 0$ e quando $x < 0$, $f'(x) = e^x \neq 0$, vemos que f' não se anula para nenhum ponto $x \leq 0$. Quando $x > 0$ temos

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (xe^{-x}+1)' = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Assim, o único ponto estacionário de f é $x = 1$. Para classificar este ponto estacionário iremos calcular a segunda derivada de f.

$$f''(x) = ((1-x)e^{-x})' = (-1)e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x} \Rightarrow f''(1) = -e^{-1} < 0$$

Assim, como $f'(1) = 0$ e $f''(1) < 0$, concluímos que se trata de um maximizante local.

(d) Mostre que f admite uma inversa g no intervalo $[1, +\infty[$ e calcule $g'(2e^{-2}+1)$. (10 pts)

Solução: Como para $x > 1$ se tem $f'(x) < 0$, concluímos que f é injectiva em $[1, +\infty[$, pelo que admite uma função inversa nesse intervalo. Observando que $f(2) = 2e^{-2} + 1$, o teorema da derivada da função inversa permite concluir que

$$g'(2e^{-2}+1) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{-e^{-2}} = -e^2$$

4. Calcule ou mostre que não existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(2x)}$.

10 pts

Solução: O limite proposto pode ser calculado por aplicação sucessiva da regra de Cauchy, já que as indeterminações são to tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4\cos(2x)} = \frac{1+1}{4\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

5. Calcule: 25 pts

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}\,dx$ (10 pts)

Solução:

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 - [\arctan x]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$$

b) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + xe^{x+2})\,dx$ (15 pts)

Solução:

$$\int_0^1 (x^2 + xe^{x+2})\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 xe^{x+2}\,dx = \left[x^3/3\right]_0^1 + \int_0^1 \underbrace{x}_{v}\underbrace{e^{x+2}}_{u'}\,dx$$

$$=1/3 + \left(\left[xe^{x+2}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{x+2}\cdot 1\,dx\right)$$

$$=1/3 + e^3 - \left[e^{x+2}\right]_0^1 = 1/3 + e^3 - e^3 + e^2 = 1/3 + e^2$$

6. Supondo que a equação $xy^2 + y = 1$ permite, numa vizinhança do ponto $(0,1)$, definir y como função de x, obtenha uma aproximação quadrática de $y(x)$ em torno do ponto $x = 0$. 15 pts

Solução: A aproximação quadrática de $y(x)$ em torno de $x = 0$ é dada por

$$y(x) \approx y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}\,x^2$$

Como do enunciado sabemos que $y(0) = 1$, apenas falta calcular $y'(0)$ e $y''(0)$.

$$xy(x)^2 + y(x) = 1 \Rightarrow 1\cdot y(x)^2 + x\cdot 2y'(x)y(x) + y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-y(x)^2}{2xy(x)+1} \Rightarrow y'(0) = \frac{-y(0)^2}{2\cdot 0y(0)+1} = -1$$

$$y''(x) = \left(\frac{-y(x)^2}{2xy(x)+1}\right)' = -\frac{2y'(x)y(x)(2xy(x)+1) - y(x)^2(2y(x)+2xy'(x))}{(2xy(x)+1)^2}$$

$$\Rightarrow y''(0) = -\frac{2y'(0)y(0)(0+1) - y(0)^2(2y(0)+0)}{(0+1)^2} = 4$$

Assim, temos finalmente que, numa vizinhança de $x = 0$,

$$y(x) \approx 1 - x + 2x^2.$$

Pode utilizar o espaço restante para concluir respostas que não tenha sido possível terminar no espaço reservado para o efeito. Não se esqueça de assinalar claramente as perguntas a que dizem respeito.