INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2011/2012 - 2º Semestre
Exame de Recurso, 28 de Junho de 2012 Duração: 2 horas

Nome: ____

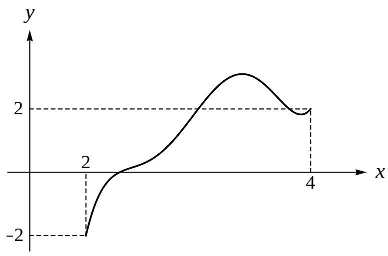
Nº de Aluno: __________ Curso: ______________________ Classificação: __________

Parte I: Perguntas de escolha múltipla (60 pontos)
Cada resposta correcta vale 15 pontos e cada resposta incorrecta é penalizada em 5 pontos. A cotação mínima na primeira parte é de zero pontos.

1. Considere uma função $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$, diferenciável, cujo gráfico está esboçado na figura abaixo. Qual das seguintes afirmações é **falsa** ?

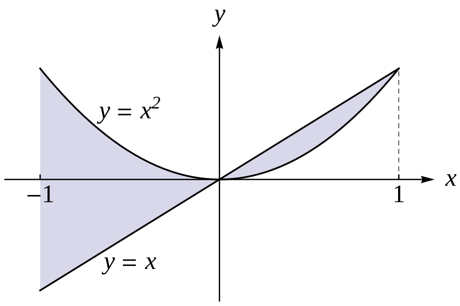
15 pts

- [ ] Existe $c \in]2, 4[$ tal que $f'(c) = 2$.
- [ ] O máximo global é atingido num ponto estacionário.
- [x] O mínimo global é atingido num ponto estacionário.
- [ ] Existe $c \in]2, 4[$ tal que $f'(c) = 0$.



2. Suponha que pretende calcular a área a sombreado na figura. Qual dos integrais seguintes corresponde ao valor pretendido ?

15 pts



- [ ] $\int_{-1}^{0} x\,dx - \int_{0}^{1} x^2\,dx$
- [ ] $\int_{-1}^{1} (x - x^2)\,dx$
- [ ] $\int_{-1}^{1} (x^2 - x)\,dx$
- [x] $\int_{-1}^{0} (x^2 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^2)\,dx$

3. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função invertível no seu domínio e g a sua inversa. Então:

15 pts

- [ ] $f(0) = 0$
- [ ] f é contínua
- [x] f é injectiva
- [ ] $g(1) = 1/f(1)$

4. Considere o sistema linear $A\vec{x} = \vec{b}$ em que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira** ?

15 pts

- [ ] Se $r(A) < r(A|b)$ o sistema tem várias soluções.
- [x] Se $r(A) = 3$ o sistema é possível e determinado.
- [ ] Se $|A| = 0$ o sistema é possível e indeterminado.
- [ ] Se $|A| = 2$ então $|2A| = 4$.

Parte II: Perguntas de desenvolvimento (140 pontos)
Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Considere o sistema linear

40 pts

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Classifique este sistema em função dos valores dos parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$, indicando nos casos adequados o número de graus de liberdade. (20 pts)

Solução: Vamos proceder à condensação da matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 - \frac{3}{2}L_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -a-3/2 & b-9/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 + L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -a-1 & b-4 \end{array}\right)$$

Uma vez que apenas foram realizadas operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada $A|b$, o sistema inicial é equivalente ao que obtivémos após condensação. Assim:

- Se $a \neq -1$ então $r(A) = r(A|b) = 3$, pelo que o sistema é possível e determinado, $\forall b \in \mathbb{R}$.
- Se $a = -1$ e $b \neq 4$ então $r(A) = 2, r(A|b) = 3 \neq r(A)$, pelo que o sistema é impossível.
- Se $a = -1$ e $b = 4$ então $r(A) = r(A|b) = 2$ pelo que o sistema é possível mas indeterminado, com $3 - 2 = 1$ graus de liberdade.

(b) Considere $a = -2, b = 4$ e determine z utilizando a regra da Cramer. (10 pts)

Solução: Uma vez que o sistema dado é equivalente ao sistema condensado obtido na alínea anterior, vamos usar este último no cálculo da solução.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-1} = 0$$

(c) Considere a matriz A dos coeficientes do sistema linear dado, no caso $a = 0$, e o vetor coluna $\vec{y} = (1\ 1\ 1)'$. Calcule $d(A\vec{y}, \vec{y})$. (10 pts)

Solução:

$$A\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d(A\vec{y}, \vec{y}) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}.$$

2. Considere vetores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ tais que $\vec{x}$ é ortogonal a $\vec{y}$ e a $\vec{y} + \vec{z}$. Mostre que nesse caso $\vec{x}$ é ortogonal a $\vec{z}$.

10 pts

Solução: Uma vez que $\vec{x} \perp \vec{y}$ e que $\vec{x} \perp (\vec{y} + \vec{z})$, sabemos que $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ e que $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = 0$. Deste modo

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = 0 \Rightarrow \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}}_{=0} + \vec{x} \cdot \vec{z} = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{z} = 0,$$

pelo que concluímos que $\vec{x} \perp \vec{z}$.

3. Considere a função $f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 + 1, & x \geq 0 \\ ax^2 + b, & x < 0 \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$

50 pts

(a) Determine o domínio de f e discuta a sua continuidade, em função dos parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$.(10 pts)

Solução: As expressões apresentadas para f nos casos $x \geq 0$ e $x < 0$ permitem sempre calcular de forma única o respectivo valor, pelo que o domínio de f é $\mathbb{R}$. Relativamente à continuidade, a mesma está assegurada para $x < 0$ (f é neste caso um polinómio) e para $x > 0$ (f é também um polinómio). Resta verificar o que sucede quando $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x^3 + x^2 + 1) = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (ax^2 + b) = b$$

Assim, a função f será contínua em $x = 0$ e portanto em $\mathbb{R}$ se e só se $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$. Em resumo, se $b = 1$ ($\forall a \in \mathbb{R}$), f é contínua em $\mathbb{R}$ e , se $b \neq 1$ ($\forall a \in \mathbb{R}$), f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Considere $a = b = 1$ e, utilizando a definição de derivada, mostre que $x = 0$ é um ponto estacionário de f. (10 pts)

Solução:

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^3 + x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} (-x^2 + x) = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} x = 0$$

Como verificámos que f tem derivada à esquerda e à direita no ponto $x = 0$ e o seu valor coincide, concluímos que f tem derivada no ponto zero e que $f'(0) = 0$, o que significa que $x = 0$ é um ponto estacionário da função.

(c) Mostre que f tem exactamente uma raíz no intervalo $]1, 2[$.(10 pts)

Solução: Como o intervalo]1,2[está contido no primeiro ramo da função, podemos usar a expressão $f(x) = -x^3 + x^2 + 1$. Observando que f é contínua e que $f(1)f(2) = -3 < 0$, o corolário do teorema do valor intermédio garante que existe pelo menos uma raiz no intervalo $]1, 2[$. Além disso, como $f'(x) = -3x^2 + 2x < 0, \quad x \in]1, 2[$, a função é estritamente decrescente nesse intervalo pelo que terá no máximo uma raiz. Destes dois factos podemos concluir que f tem uma e uma só raiz em $]1, 2[$.

(d) Determine o máximo e mínimo globais de f no intervalo $[0, 2]$. (10 pts)

Solução: Em primeiro lugar, tratando-se de uma função contínua definida num intervalo limitado e fechado, sabemos que tem máximo e mínimo globais no intervalo em causa. Além disso, sendo uma função diferenciável em $]0, 2[$, os extremantes podem apenas ocorrer em pontos estacionários no interior do intervalo ou em pontos da fronteira do domínio. Neste intervalo podemos usar $f(x) = -x^3 + x^2 + 1$, pelo que os pontos estacionários serão soluções da equação

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$$

Deste modo, os extremantes (incluindo os globais) só podem ocorrer nos pontos $x = 0$, $x = 2$ ou $x = \frac{2}{3}$. Como $f(0) = 1, f(2/3) = 31/27, f(2) = -3$ concluímos que o máximo global é $31/27$ e o mínimo global é -3.

(e) Determine a aproximação quadrática de f em torno de $x = 1$ e utilize-a para obter uma estimativa da raíz de f identificada na alínea c). (10 pts)

Solução: A aproximação quadrática de f em torno de $x = 1$ é dada por

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2.$$

Novamente, devemos usar o primeiro ramo da função. Substituindo $f(1) = 1, f'(1) = -1, f''(1) = -4$ temos que

$$f(x) \approx 1 - (x - 1) - 2(x - 1)^2 = 3x - 2x^2.$$

Podemos obter uma estimativa da raiz de f aproximando-a por raízes da aproximação quadrática. Como $3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3/2$, uma estimativa da raiz de f será $3/2$, a raiz da aproximação quadrática que pertence ao intervalo $]1, 2[$.

4. Calcule: 20 pts

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x+1)\sin x\, dx$ (10 pts)

Solução:

$$\int_0^{\pi} \underbrace{(x+1)}_{v}\underbrace{\sin x}_{u'}\, dx = [-(x+1)\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x\, dx$$
$$= \pi + 2 + [\sin x]_0^{\pi} = \pi + 2$$

b) $\displaystyle\int_0^{1} (1 + x^2 + xe^{2x^2})\, dx$ (10 pts)

Solução:

$$\int_0^1 (1+x^2+xe^{x+2})\, dx = \int_0^1 (1+x^2)\, dx + \frac{1}{4}\int_0^1 4xe^{2x^2}\, dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{4}\left[e^{2x^2}\right]_0^1$$
$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{13}{12} + \frac{e^2}{4}$$

5. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (2x+3)^{n+1}$ e, sempre que possível, calcule a sua soma. 10 pts

Solução: Em primeiro lugar, calculando o quociente entre termos consecutivos, concluímos que se trata de uma série geométrica de razão $(2x+3)$. Deste modo, a série será convergente se e só se a razão for, em módulo, inferior a 1. Ora,

$$|2x+3| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x+3 < 1 \Leftrightarrow -4 < 2x < -2 \Leftrightarrow -2 < x < -1$$
$$\Leftrightarrow x \in]-2,-1[.$$

Assim, a série converge se e só se $x \in]-2,-1[$. Para esses valores de x podemos calcular a soma da série, que é dada por

$$\sum_{n\geq 2} (2x+3)^{n+1} = \frac{(2x+3)^3}{1-(2x+3)} = -\frac{(2x+3)^3}{2x+2}.$$

6. Calcule ou mostre que não existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^{x^2} te^t\, dt.$ 10 pts

Solução:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^{x^2} te^t\, dt = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} te^t\, dt}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^{x^2} te^t\, dt\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)' x^2 e^{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0} 2x^3 e^{x^2} = 0.$$

Pode utilizar o espaço restante para concluir respostas que não tenha sido possível terminar no espaço reservado para o efeito. Não se esqueça de assinalar claramente as perguntas a que dizem respeito.