

Programação Matemática - 2012/2013

Programação por Metas

Exercício 1

Resolva o seguinte problema de otimização por metas:

$$\min Z = \{s_1^+; s_2^-; s_3^- + s_3^+\}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ & = & 20 \\ & 4x_1 - x_2 + s_2^- - s_2^+ & = & 40 \\ & 2x_1 + x_2 + s_3^- - s_3^+ & = & 40 \\ & x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ \geq 0 \end{aligned}$$

Exercício 2

Considere o seguinte problema de otimização por metas:

$$\min Z = P_1 s_1^- + P_2 s_2^+ + P_3 s_3^- + P_4 (s_4^+ + s_4^-)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 & \leq & 200 \\ & 8x_1 + 5x_2 + s_1^- - s_1^+ & = & 400 \\ & x_1 - x_2 + s_2^- - s_2^+ & = & 10 \\ & x_2 + s_3^- - s_3^+ & = & 140 \\ & x_1 + s_4^- - s_4^+ & = & 40 \\ & x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+, s_4^-, s_4^+ \geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva o problema.

b) Indique uma alteração das metas que dê origem a soluções alternativas. Justifique.

Exercício 3

Determine o conjunto ideal do seguinte problema de otimização por metas e resolva-o:

$$\min Z = \{s_1^-; s_2^-\}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_1 & \leq & 60 \\ & x_1 - x_2 & \geq & 0 \\ & 6x_1 + 9x_2 & \leq & 540 \\ & x_2 + s_1^- - s_1^+ & = & 30 \\ & x_1 + s_2^- - s_2^+ & = & 40 \\ & x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ \geq 0 \end{aligned}$$

Exercício 4

Uma empresa dispõe de 5×10^5 u.m. para gastar na campanha publicitária de lançamento de um novo produto. Pretende usar na campanha cartazes e spots televisivos sobre os quais tem a seguinte informação:

	custos (u.m.)	impacto (nº de pessoas)
spots (20 sg)	4×10^3	8×10^4
cartazes	20	1500

A empresa pretende (por ordem decrescente de importância):

- não exceder o orçamento
- editar pelo menos 20,000 cartazes
- atingir com os spots televisivos pelo menos 1 milhão e 500 mil potenciais clientes

a) Proponha uma campanha publicitária. Justifique.

b) Nas condições pretendidas, qual é o número máximo de potenciais compradores que é possível atingir com cada veículo publicitário ? Justifique.

Exercício 5

Resolva o seguinte problema de otimização por metas:

$$\min Z = P_1 s_1^- + P_2 s_2^- + P_3 s_3^-$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_2 + s_1^- - s_1^+ & & = 5 \\ & -x_1 - x_2 + s_2^- - s_2^+ & & = 4 \\ & & x_3 + s_3^- - s_3^+ & = 3 \\ & & x_2 & \leq 2 \\ & & x_3 & \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ & \geq 0 \end{aligned}$$

Exercício 6

Considere o seguinte problema de otimização por metas:

$$\min Z = P_1 s_1^- + P_2 (s_2^- + s_2^+) + P_3 s_3^-$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 + s_1^- - s_1^+ & & = 0 \\ & 3x_1 + 5x_2 + s_2^- - s_2^+ & & = 15 \\ & x_1 + s_3^- - s_3^+ & & = 4 \\ & x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ & \geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Resolva-o pelo método de simplex.

Exercício 7

Uma fábrica de pequena dimensão localizada no norte do país produz conservas de peixe que vende no mercado interno e externo. Actualmente, o mercado interno, que está limitado a lojas gourmet, absorve apenas 5% da produção total anual. Como, ao contrário de outros, o sector da indústria conserveira nacional se encontra em crescimento, a administração pretende aumentar os níveis de produção da fábrica no próximo ano. A fábrica produz actualmente 50 mil latas de sardinha e 30 mil latas de atum por ano. A conserva de sardinha é vendida ao preço médio de 4 e 5 euros a lata no mercado interno e externo, respectivamente. A receita média da conserva de atum é de 2 e 3 euros a lata no mercado interno e externo, respectivamente. Para estabelecer o plano de produção para o próximo ano, a administração da fábrica estabeleceu as seguintes metas, por ordem decrescente de importância:

1. Aumentar a receita total anual em pelo menos 10%.
2. Limitar a produção anual de conserva de sardinha e de atum a 55 mil e 35 mil latas, respectivamente.
3. Aumentar a produção anual em pelo menos 2 mil latas para o mercado interno e não permitir um aumento de produção anual para o mercado externo de mais de mil latas.

Formalize, como um problema de optimização por metas, o problema cuja solução permitirá à administração da fábrica estabelecer o plano de produção para o próximo ano, indicando o significado de todas as variáveis e funções que utilizar.

Exercício 8

Uma empresa vai iniciar a produção de dois novos componentes electrónicos, C1 e C2. Numa fase inicial, serão disponibilizadas 40 horas semanais de mão-de-obra para produzir os novos componentes, sendo que, em média, a produção unitária dos componentes requer uma hora de mão-de-obra. Estima-se que as vendas semanais não ultrapassem as 24 unidades do componente C1 e as 30 unidades do componente C2 tendo os lucros unitários de C1 e C2 sido estimados em 80 e 40 u.m., respectivamente.

Foram estabelecidos os seguintes objectivos, por ordem decrescente de importância:

1. Evitar a subutilização da capacidade produtiva.
2. Produzir o maior número possível de componentes, de acordo com a contribuição para o lucro de cada componente.
3. Evitar a contratação de mão-de-obra adicional.

Formalize, como um problema de optimização por metas, o problema cuja solução permitirá estabelecer um plano de produção dos novos componentes. Indique o significado de todas as variáveis e funções que utilizar.

Exercício 9

Uma empresa de refrigerantes vai instalar uma unidade fabril em Angola. Actualmente a fábrica, localizada em Portugal, produz 75 milhões de litros de refrigerante por ano, dos quais 70% são vendidos em Portugal, sendo o restante exportado. Angola absorve 40% das exportações. O refrigerante é vendido em recipientes com capacidade para 0,33 litros: garrafas de vidro ou plástico e latas. Em média o enchimento de 250 garrafas consome uma unidade energética. Uma unidade energética é também necessária para encher 350 latas. Para a produção anual na unidade fabril de Angola, a empresa estabeleceu os seguintes objectivos, por ordem decrescente de prioridade:

1. Produzir pelo menos 50% da quantidade procurada e não ter excedente no fim do ano.
2. O rácio de produção de refrigerante em latas para garrafas de vidro ser pelo menos de 2 para 1.
3. Não ultrapassar as 30 mil unidades de consumo energético.

Formalize, como um problema de optimização por metas, o problema cuja solução permitirá planear a produção de refrigerantes na unidade fabril de Angola. Indique o significado de todas as variáveis e funções que utilizar.

Exercício 10

O proprietário de uma cadeia de livrarias acaba de receber de uma editora uma remessa de 5000 livros infantis. Dessa remessa, 100 livros serão oferecidos aos filhos dos funcionários das livrarias e pelo menos 2000 serão colocados à venda em quatro lojas, das quais duas estão localizadas em centros comerciais. Os restantes livros serão oferecidos a uma instituição de solidariedade social. O proprietário da cadeia de livrarias pretende, por ordem decrescente de prioridade:

1. Colocar à venda nas lojas localizadas em centros comerciais pelo menos 70% do número total de livros a comercializar;
2. Colocar à venda pelo menos 500 livros em cada loja localizada fora de um centro comercial;
3. Colocar à venda igual número de livros nas lojas localizadas em centros comerciais;
4. Por cada 100 livros colocados numa loja oferecer pelo menos 2 livros à instituição de solidariedade social.

Formalize, como um problema de optimização por metas, o problema cuja solução permitirá ao proprietário da cadeia de livrarias tomar uma decisão sobre a colocação dos livros nas lojas.