Instituto Superior de Economia e Gestão

Análise Matemática II

Licenciatura em MAEG

Lista de Exercícios

Ano lectivo 2012-2013 (2^o Semestre)

1 Séries de termos reais

Exercício 1.1 *Determine que valores de x tornam as séries seguintes convergentes e calcule a sua soma.*

a) $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ *b)* $\sum_{n\geq 0}(1-|x|)^n$

c) $\sum_{n\geq 0} x$ *d)* $\sum_{n\geq 1}\frac{x}{n^2+n}$.

Exercício 1.2 *Utilize a teoria das séries geométricas para calcular os racionais correspondentes às dízimas infinitas periódicas:*

a) $3,66666(6)$ *b)* $1,1818(18)$ *c)* $1,0108(08)$

d) $1,123(123)$ *e)* $0,99999(9)$.

Exercício 1.3 *Calcule a soma das seguintes séries:*

a) $\sum\limits_{n\geq 0} 3^{-(5n+1)}$ *b)* $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{2^n+3^n}{6^n}$ *c)* $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}$

d) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$ *e)* $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{3}{2^n}\right)$

Exercício 1.4 *Prove que se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *existir e fôr finito, então a série* $\sum\limits_{n\geq 1}(a_n - a_{n+k})$ *é convergente e a sua soma é* $a_1 + a_2 + \ldots + a_k - k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Exercício 1.5 *Determine a natureza das seguintes séries e a soma das que são convergentes:*

a) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ *b)* $\sum\limits_{n\geq 3}\frac{1}{n^2-4}$ *c)* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+k)},\ k\in\mathbb{R}$

d) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ *e)* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+3)(n+6)}$.

Exercício 1.6 *Mostre que se* $a_n \neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$, *e* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *converge, então* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{a_n}$ *é divergente.*

Exercício 1.7 *Sendo* a_n *uma sucessão real tal que* $a_n \to +\infty$, *indique, justificando, a natureza da série* $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$.

Exercício 1.8 *Estude, utilizando o critério de comparação ou um dos seus corolários, a natureza das seguintes séries:*

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3-1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2+1\right)}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{3+(-1)^n}\right)^n$ *e)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

g) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\log n}$ *h)* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^4-3n^2-1}$ *i)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-1/n}}{n^k}$

j) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n\sqrt{n}}e^n$ *k)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(n\cdot\operatorname{sen}\frac{2}{n}\right)^{2n}$ *l)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

m) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{n+1}\right)^n$ *n)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n\sqrt{n}}$ *o)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(n\operatorname{sen}\frac{k}{n}\right)^{2n}$ *com* $|k|\neq 1$

p) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}e^{-n}\left(\log n\right)^n$ *q)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{n}e^{-n}$ *r)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}$

s) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)^3\sqrt[3]{n^2+n}}$ *t)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)$ *u)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}\left(\frac{9}{8}\right)^n$

v) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}n!\left(\frac{3}{4}\right)^{n^2}$ *w)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}n\frac{1}{\left(a^2+2\right)^n}$ *x)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\left(\frac{10}{9}\right)^{n^2}.$

Exercício 1.9 *Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *duas séries convergentes de termos positivos. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:*

a) $\displaystyle\sum\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)$ *b)* $\displaystyle\sum\frac{n+1}{n}a_n.$

Exercício 1.10 *Estude, quanto à natureza, a série de termo geral* $\dfrac{a^n}{1+b^n}$ *nos seguintes casos:*

a) $0<a<b$
b) $0<b\leq a<1$
c) $1\leq b\leq a.$

Exercício 1.11 *Sejam* a_n *e* b_n *duas sucessões de termos positivos tais que a série* $\sum a_n$ *e a série* $\sum\left(b_n-b_{n+1}\right)$ *são convergentes. Mostre que a série* $\sum\left(a_nb_n\right)$ *é uma série convergente.*

Exercício 1.12 *Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as seguintes séries:*

a) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *b)* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n\left(n^2+1\right)}{n^2+n+3}$ *c)* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n n}{n^2\sqrt{n}}$ *d)* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$

e) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n n}{6n-5}$ *f)* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ *g)* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n\log n}{n}$.

Exercício 1.13 *Considere a série* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

a) Justifique que se trata de uma série convergente e calcule a soma da série com um erro inferior a $0,01$.

b) Indique um majorante do erro que comete quando aproxima a soma da série pela soma dos 3 primeiros termos.

Exercício 1.14 *Seja* a_n *uma sucessão tal que a série* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente. Prove que a série* $\sum a_n^2$ *também o é. Dê um exemplo que mostre que o recíproco não é verdadeiro.*

Exercício 1.15 *Determine os intervalos de convergência das seguintes séries de potências:*

a) $\sum\limits_{n\geq 1}(n+1)^{-1/2}(x+1)^n$ *b)* $\sum\limits_{n\geq 1}n(x-2)^{n-1}$ *c)* $\sum\limits_{n\geq 1}\binom{n+4}{5}x^{4n}$

d) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1.3....(2n+1)}{2.4....(2n+2)}\dfrac{1}{n+1}(x-1)^n$.

Exercício 1.16 *Calcule as somas das seguintes séries nos respectivos intervalos de convergência:*

a) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n}$ *b)* $\sum\limits_{n\geq 1}nx^n$ *c)* $\sum\limits_{n\geq 1}n^2x^n$

d) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{2n+1}(x-1)^{2n+1}$ *e)* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}(x-1)^{n+1}$.

Exercício 1.17 *Desenvolva a função* $\log x$ *em série de potências de* $x-2$, *indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.*

Exercício 1.18 *Desenvolva a função* $\dfrac{1}{x^2}$ *em série de potências de* $x+1$, *indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.*

Exercício 1.19 *Considere a função* $f(x) = e^x$.

a) Calcule a sua série de MacLaurin e prove que a função é soma da sua série de Mac-Laurin para todo o $x \in \mathbb{R}$.

b) Com base na alínea anterior prove que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exercício 1.20 *Escreva o desenvolvimento de MacLaurin das seguintes funções:*

a) $f(x) = a^x$, $a > 0$ *b)* $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$ *c)* $f(x) = \cos x$.

Exercício 1.21 *Desenvolva em série de MacLaurin a função* $x \log\left(1 + x^3\right)$ *e justifique que a função tem um mínimo no ponto* $x = 0$.

Exercício 1.22 *Desenvolva em série de potências de* $x - 1$, *a função* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = x^2 \log(x^2)$, *indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.*

Exercício 1.23 *Desenvolva em série de potências de* $x - 2$ *a função* $\dfrac{4}{3x}$, *indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Utilize o resultado obtido para determinar o valor de* $f^{(17)}(2)$.

Exercício 1.24 *Desenvolva em série de MacLaurin a função* $2^x + \dfrac{1}{2+x}$ *e indique, justificando, o intervalo de convergência da série obtida.*

Exercício 1.25 *Calcule o polinómio de Taylor de grau 2 da função* $f(x) = \int_1^{u(x)} \ln t \, dt$ *no ponto* $x = 2$, *sabendo que a função* $u(x)$ *é de classe* $C^2(\mathbb{R})$, *tem por contradomínio o conjunto* $[1, +\infty)$ *e* $u(2) = 1$.

Exercício 1.26 *Utilize a fórmula de MacLaurin para provar a fórmula do Binómio de Newton,*

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n.$$