



§ 1.2 Dualidade e Análise de Sensibilidade

1.2.1. Dualidade

Exemplo Considere uma multinacional, MN, que pretende comprar todos os recursos da empresa protótipo, ao melhor preço possível.

? O que é que a multinacional tem de decidir ?

? Quanto vai pagar no total ?

? Quanto pretende pagar?

? Em que condições é que a multinacional vai conseguir comprar os recursos à empresa protótipo?

i) Quanto recebe a empresa protótipo se vender 1 porta?

ii) E quanto recebe a empresa protótipo se em vez de vender 1 porta, decidir vender à MN os recursos para fabricar essa porta?

Então a MN só consegue que a empresa protótipo lhe venda os recursos necessários para fazer 1 porta se

**Analogamente,**

i) Quanto recebe a empresa protótipo se vender 1 janela?

ii) E quanto recebe a empresa protótipo se em vez de vender 1 janela, decidir vender à MN os recursos para fabricar essa janela?

Então a MN só consegue que a empresa protótipo lhe venda os recursos necessários para fazer 1 janela se

Assim, a Multinacional pretende determinar y_1, y_2, y_3 tais que

minimizem $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

e respeitem as condições impostas pela empresa protótipo, isto é

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Qualquer problema de PL (chamemos-lhe **Primal**) está associado a um outro problema de PL, que designamos por problema **Dual**.

As relações entre o Primal e o Dual são muito importantes. Num problema de análise de atividades, por exemplo, o valor ótimo das variáveis principais do dual (y_i^*) representam as **valorizações internas dos recursos**.

y_i^* - chama-se **preço sombra** do recurso i
- representa a proporção de variação no valor ótimo,
em função do acréscimo do 2º membro da restrição i
= valor marginal do recurso i

A teoria da Dualidade é fundamental para a Análise de Sensibilidade e Pós-otimização (onde se pretende saber o efeito no ótimo, perante alterações de certos parâmetros do modelo inicial)



Primal vs Dual (exemplo protótipo)

max
(P)

min
(D)

1 restrição \leftrightarrow 1 var de decisão
 rest \leq var ≥ 0

1 var de decisão \leftrightarrow 1 restrição
 var ≥ 0 rest \geq

Coef.s das var.s na f.o. \leftrightarrow RHS

RHS \leftrightarrow Coef.s das var.s na f.o.



Primal vs Dual (caso geral)

max
(P)
(D)

min
(D)
(P)

1 restrição \leftrightarrow 1 var de decisão

| | |
|-------------|--------------|
| rest \leq | var ≥ 0 |
| rest \geq | var ≤ 0 |
| rest = | var livre |

1 var de decisão \leftrightarrow 1 restrição

| | |
|--------------|-------------|
| var ≥ 0 | rest \geq |
| var ≤ 0 | rest \leq |
| var livre | rest = |

Coef.s das var.s na f.o. \leftrightarrow RHS

RHS \leftrightarrow Coef.s das var.s na f.o.



Algumas Propriedades da Dualidade

- O dual do dual é o primal
- Dado um par de problemas duais, se um dos problemas tiver solução ótima então o outro também tem e ambos têm o mesmo valor ótimo ($z^*=w^*$)
- Se existir uma solução admissível do primal (x' , com valor da f.o. z') e uma solução admissível do dual (y' , com valor da f.o. w') tais que $z'=w'$ então, ambas são soluções ótimas do respetivo problema.
- Dado um par de problemas duais, se um dos problemas tiver f.o. ilimitada então o outro é impossível.



? Como resolver o dual dum PL ?

- Diretamente, como qualquer PL

ou

- A partir da resolução do primal com o *Solver*
(y_i^* = preço sombra do recurso i)

ou

- Se conhecer a s.o. do primal, através de relações de complementaridade
(y_i^* = proporção de variação no valor ótimo, em função do acréscimo do 2º membro da restrição i
= valor marginal do recurso i)

ou ainda,

- se o primal tiver sido resolvido graficamente, usando a resolução gráfica do primal
(y_i^* = proporção de variação no valor ótimo, em função do acréscimo do 2º membro da restrição i)



1.2.2. Análise de Sensibilidade:

a) coeficientes da função objetivo

Admita-se que c_j foi modificado para $c_j + \Delta_j$.

Sem voltar a resolver o problema original,
para que valores de Δ_j sabemos dizer exatamente quais as
consequências no valor ótimo, por se ter feito tal alteração?

E quais as consequências na solução ótima?



§1.2.2. Análise de Sensibilidade

b) segundos membros das restrições funcionais

Admita-se que **b_i** foi modificado para **$b_i + \Delta_i$** .

Sem voltar a resolver o problema original,
para que valores de **Δ_i** sabemos dizer exatamente quais as
consequências no valor ótimo, por se ter feito tal alteração?

E quais as consequências na solução ótima?



Alterações simultâneas
nos coeficientes na função objetivo:
regra dos 100%

Se os coeficientes variarem dentro dos respetivos intervalos de admissibilidade

e

a soma das percentagens de variação (relativamente à variação máxima no intervalo) for não superior a 100%,

então

a solução ótima não se altera.

(senão, nada se pode concluir)



Alterações simultâneas
nos segundos membros:
regra dos 100%

Se os segundos membros variarem dentro dos respetivos intervalos de admissibilidade
e
a soma das percentagens de variação (relativamente à variação máxima no intervalo) for não superior a 100%,
então
os preços sombra não se alteram e a sua interpretação permanece válida.

(senão, nada se pode concluir)