Programação Linear Inteira

Exemplo

A *TBA Airlines* é uma pequena companhia aérea, especializada em voos regionais, com aviões de pequenas dimensões. A direcção da empresa está a pensar ampliar o negócio, enfrentando as opções de compra de novos aviões pequenos e/ou de aviões maiores para poder dar resposta a novas solicitações de voos.

Pretende-se saber qual a estratégia de compra mais vantajosa, sabendo que neste momento não é possível comprar mais de 2 aviões pequenos e que pode dispor de *US$100 milhões* para investir. Os dados relevantes encontram-se na tabela

	Aviões pequenos	Aviões grandes
Lucro anual por aviao	*US$ 1 milhão*	*US$ 5 milhões*
Custo por aviao	*US$ 5 milhões*	*US$ 50 milhões*

Formalizar; resolver graficamente; resolver no Solver;

Obs: em PLI não há sensivity report. NAO ARREDONDAR xlp=(2;1.8) x*=(0;2)

- Variáveis inteiras vs variáveis contínuas

- PLI pura e mista

- **Programação Inteira** (PLI) vs **Programação Binária** (PLB)
  (xj inteiras) (xj=0 ou 1)

- PLB (pura e mista)

  Decisões do tipo S/N
  (afetação de pessoas a tarefas;
  Decisão sobre investir, ou não, em determinado projeto;…)
  Decisões mutuamente exclusivas
  Decisões dependentes
  Disjunção de restrições
  Combinação de custos fixos com custos variáveis

(Ex: carris; recolha do lixo; cortes de peças de 2 dimensões; escalonamento de pessoal)

Decisões mutuamente exclusivas

Exemplo prototipo:
pretendia-se saber
- nº de lotes de portas (x1) e
- nº de lotes de janelas (x2)

a fabricar, por semana, com **restrições** nos recursos (h-m F1, F2 e F3) e de modo a **maximizar o lucro**
(cada lote de portas tem lucro de 3 u.m. e cada lote de janelas 5 u.m.)

Formalização

$$
\begin{array}{llr}
 & \max z = 3x_1 + 5x_2 & \text{(lucro)} \\
 & x_1 \leq 4 & \text{(F1)} \\
\text{s.a:} & 2x_2 \leq 12 & \text{(F2)} \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 & \text{(F3)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0, &
\end{array}
$$

Variante 1: vão-se produzir só portas ou só janelas (ou nada, mas nao ambas)

Escolher produzir um produto implica não escolher o outro
(e é possível não escolher ambos)

Definam-se

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se se produzir } P_j \\ 0, & \text{se não se produzir } P_j \end{cases}, j = 1{,}2$$

Então, para M suficientemente grande, fazendo

x1 <= M y1
x2 <= M y2
y1 + y2 <= 1
x1, x2 >=0 e y1, y2 em {0,1}

produzir-se-á P1 ou P2 (ou nenhum) mas nunca ambos.

(y1 + y2 <=1 -----> y1 + y2 = 1   …)

Disjunção de restrições

(R1) $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$
(R2) $a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$

Pretende-se R1 ou R2 (1 e 1 só das restrições).

Seja

$$y = \begin{cases} 1, & se\ R1\ for\ ativa \\ 0, & se\ R2\ for\ ativa \end{cases}$$

Então,

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 + M(1-y)$$
$$a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 + My, \text{com } M \text{ suficientemente grande}$$

Exemplo protótipo: variante 2

A empresa protótipo tem possibilidade de utilizar uma outra fábrica, F4, semelhante à fábrica F3, isto é, a fábrica F4 pode executar as mesmas tarefas que a F3, na produção de portas e janelas.

Na fábrica F4 cada lote de portas consome 2 h-m para ser produzido e cada lote de janelas 4 h-m. A fábrica F4 tem 28 h-m disponíveis semanalmente.

A direcção da fábrica pretende usar apenas uma das fábricas (F3 ou F4).

E se tivermos **m restrições**, das quais pretendemos que apenas **k** estejam **ativas**?

(R1): $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$
(R2): $a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$
...
(Rm): $a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$

Sejam

$$y_i = \begin{cases} 1, \ se \ \ a \ \ restrição \ i \ for \ \ ativa \\ \\ 0, se \ \ a \ restrição \ i \ não \ for \ \ ativa \end{cases}$$

Então, se pretendermos que apenas **k** das restrições estejam **ativas**, faz-se

(R1): $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 + M(1 - y_1)$

(R2): $a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 + M(1 - y_2)$

…

(Rm): $a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m + M(1 - y_m)$

e ainda

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_m = k$$

Combinação de custos fixos com custos variáveis

Exemplo protótipo: variante 3

Sempre que se produz qualquer dos produtos tem-se um custo fixo (afinação do equipamento para começar a produção): 7 u.m. para as portas e 13 u.m. para as janelas.

Exemplo (§11.1) California Manufacturing Co

(...) A administração da *California Manufacturing Co* pretende saber se deve construir uma nova fábrica em Los Angeles ou em S. Francisco, ou mesmo nas duas cidades. Está também a considerar construir um armazém (no máximo), obrigatoriamente numa das cidades onde a fábrica for construída.

O montante máximo a investir é 10 milhões de dólares e os dados principais são os seguintes

Questões S/N	valor atual líquido	capital necessário
Construir uma fábrica em Los Angeles?	US$ 9 milhões	US$ 6 milhões
Construir uma fábrica em S. Francisco?	US$ 5 milhões	US$ 3 milhões
Construir um armazém em Los Angeles?	US$ 6 milhões	US$ 5 milhões
Construir um armazém em S. Francisco?	US$ 4 milhões	US$ 2 milhões

Pretende-se determinar a combinação de investimentos que maximiza o valor atual líquido total.

Exemplo (§11.4) Good Products Company

O departamento de Investigação da GPC desenvolveu 3 possíveis novos produtos. Para evitar demasiada diversificação na linha de produtos da GPC, o diretor impôs a seguinte restrição: dos 3 possíveis novos produtos, no máximo 2 deverão ser produzidos
Por razões administrativas o diretor impôs também que toda a produção dos novos produtos seja feita na mesma fábrica.

Os custos de produção unitários são essencialmente os mesmos nas duas fábricas. No entanto, devido à diferença de equipamentos, o tempo de produção unitário pode diferir de uma fábrica para a outra. Na tabela seguinte encontram-se estes valores e a estimação de vendas semanais feitas pela equipa de marketing.

O diretor pretende saber que produtos produzir, onde e em que quantidade, de modo a maximizar o lucro total.

	nº de horas necessárias por unidade a produzir			nº de horas disponíveis por semana
	P1	P2	P3	
Fábrica F1	3	4	2	30
Fábrica F2	4	6	2	40
Lucro unitário	5	7	3	(em milhares de dolares)
Potenciais vendas	7	5	9	(unidades por semana)