Teoria de Jogos

Jogos de 2 pessoas e soma nula

Teoria de jogos

Começou a desenvolver-se nos anos 30 do sec. XX

1944,*'The Theory of games and Economic Behavior'*,
John von Newman, Oscar Morgenstern

1994, John Harsanyi, **John Nash** (1928) (A beautiful mind),
Reinhard Selten (1930),

Nobel da Economia
Premio do Banco Central da Suécia de Ciências Económicas
em Memória de Alfred Nobel

2005, Robert Auman (1930), Thomas Schelling (1921)

2007, Leonid Hurwicz, Eric Maskin (1950), Robert Myerson (1951)

2012, Alvin Roth (1951) e Lloyd Shapley (1923)

Os participantes, para atingirem os seus objetivos,

não pensam só nos seus próprios objetivos mas também nos dos opositores,

tomando as suas decisões tendo em conta as possíveis decisões estratégicas dos opositores

Guerra

Processos negociais entre sindicatos e empregadores

Interações entre empresas que disputam o mesmo mercado

Jogos de 2 pessoas e soma nula: Exemplo protótipo

Exemplo protótipo: variante 1

Dois políticos (J1 e J2) disputam entre si um lugar no Senado. Os últimos 2 dias de campanha serão passados em duas cidades-chave: Bigtown e Megalópolis. Cada político solicitou ao seu coordenador de campanha para avaliar o impacto das diferentes decisões (ambos dispõem da mesma informação)

E1 = passar 1 dia em cada cidade

E2 = passar os 2 dias em Bigtown

E3 = passar os 2 dias em Megalópolis

A informação obtida foi a seguinte:

Total de votos líquidos ganhos pelo político 1 ao político 2
(em milhares de votos):
(matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios)

		J2		
		E1	E2	E3
	E1	1	2	4
J1	E2	1	0	5
	E3	0	1	-1

Def: Uma **estratégia** é **dominada** por outra, se a 2ª for pelo menos tão boa como a primeira.

Obs: uma estratégia dominada pode ser eliminada.

Caso geral: dados

- *m* estratégias do J1 (E1,...,Em)
- *n* estratégias do J2 (E1,...,En)
- matriz dos ganhos (*pij, i=1,...,m; j=1,...,n*)

pij = quantia que o J1 recebe do J2,
quando J1 escolhe a estratégia *i* e
o jogador J2 escolhe a estratégia *j*

Exemplo protótipo: variante 2

Total de votos líquidos ganhos pelo político 1
(em milhares de votos)

		J2		
		E1	E2	E3
	E1	-3	6	-2
J1	E2	2	2	0
	E3	5	-4	-2

Obs: não há estratégias dominadas

Hipóteses (**Jogos de 2 pessoas e soma nula**):

- Os jogadores J1 e J2 têm interesses totalmente opostos.
  Não há **cooperação** possível

- Uma só jogada + escolha simultânea

- Cada jogador é **racional**, isto é, avesso ao risco e portanto escolhe a melhor das piores situações (por exemplo, J1...)

- Cada jogador escolhe uma estratégia (pura ou mista) que lhe permita obter o melhor ganho possível, caso o seu oponente soubesse que estratégia ele ia escolher

(**Hipótese Fundamental dos jogos de 2 pessoas e soma nula**, John von Newman & Óscar Morgenstern)

Def: Se $\max_i (\min_j p_{ij}) = \min_j (\max_i p_{ij}) = v$,

então diz-se q a matriz satisfaz a condição de **ponto de sela**.
À constante *v* chama-se **valor do jogo**.

Obs: se existe ponto de sela, então cada jogador não mudaria a sua estratégia se conhecesse antecipadamente a do outro

→ **solução de equilíbrio** ou **solução estável**

(nenhum jogador pode melhorar o seu ganho
se mudar unilateralmente a sua estratégia).

Jogos com estratégias mistas

Exemplo protótipo: variante 3

Total votos líquidos ganhos pelo politico1 (em milhares de votos):

		J2		
		E1	E2	E3
	E1	0	-2	2
J1	E2	5	4	-3
	E3	2	3	-4

Obs: sem ponto de sela;
qq solução é instável.

Uma vez q **nenhum jogador pode saber da decisão do outro**, entre as estratégias aceitáveis dever-se-á usar alguma aleatoriedade.

Def: **Estratégia mista**: Cada jogador escolhe cada uma das estratégias possíveis com uma determinada probabilidade.

Seja

xi = probabilidade do jogador 1 escolher a estratégia *i, i=1,...,m*

yj = probabilidade do jogador 2 escolher a estratégia *j, j=1,..,n.*

Exemplo:

x = (1/2,1/2,0) e y = (0,2/3,1/3)

Ganho esperado para o jogador 1:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_i y_j$$

Objetivo do J1: escolher a estratégia mista que maximize o ganho esperado mínimo, isto é, determinar x1, x2, x3 de modo a

$$\max_{x1,x2,x3} \left(\min (\text{ganhos esperados}) \right)$$

Ora,

Se J2 escolher E1, o ganho esperado do J1 é $0x1 + 5x2 + 2x3$

Se J2 escolher E2, o ganho esperado do J1 é $-2x1 + 4x2 + 3x3$

Se J2 escolher E3, o ganho esperado do J1 é $2x1 - 3x2 - 4x3$

Assim, J1 pretende

$$\max_{x1,x2,x3} \left(\min (0x1 + 5x2 + 2x3,\ -2x1 + 4x2 + 3x3,\ 2x1 - 3x2 - 4x3) \right)$$

Resolução pela Programação Linear

Vimos q, para encontrar a sua estratégia ótima, o J1 precisa de determinar

$$\max_{x1,x2,x3} (\min (0x1 + 5x2 +2x3, -2x1 + 4x2 + 3x3, 2x1 - 3x2 - 4x3))$$

Seja $v = \min (0x1 + 5x2 +2x3, -2x1 + 4x2 + 3x3, 2x1 - 3x2 - 4x3)$. Então,

$$v <= 0x1 + 5x2 + 2x3$$
$$v <= -2x1 + 4x2 + 3x3$$
$$v <= 2x1 - 3x2 - 4x3$$

Assim, para determinar a estratégia otima para J1, basta resolver o PL:

$$\max \; v$$
$$v <= 0x1 + 5x2 + 2x3$$
$$v <= -2x1 + 4x2 + 3x3$$
$$v <= 2x1 - 3x2 - 4x3$$
$$x1 + x2 + x3 = 1$$
$$x1, x2, x3 >= 0$$

Analogamente,

Objetivo do J2: escolher a estratégia mista que minimize a perda esperada máxima, isto é, determinar y1, y2, y3 de modo a

$$\min_{y1,y2,y3} \left(\max (\text{perdas esperadas}) \right)$$

Ora,

Se J1 escolher E1, a perda esperada do J2 é $0y1 - 2y2 + 2y3$
Se J1 escolher E2, a perda esperada do J2 é $5y1 + 4y2 - 3y3$
Se J1 escolher E3, a perda esperada do J2 é $2y1 + 3y2 - 4y3$

Assim, J2 pretende

$$\min_{y1,y2,y3} \left(\max (0y1-2y2+2y3,\ 5y1 + 4y2 - 3y3,\ 2y1 + 3y2 - 4y3) \right)$$

Resolução pela Programação Linear

Sendo $t = \max(0y1 - 2y2 + 2y3,\ 5y1 + 4y2 - 3y3,\ 2y1 + 3y2 - 4y3)$,

$$
\begin{aligned}
t &\geq 0y1 - 2y2 + 2y3 \\
t &\geq 5y1 + 4y2 - 3y3 \\
t &\geq 2y1 + 3y2 - 4y3
\end{aligned}
$$

Assim, para determinar a estratégia otima para J2, basta resolver o PL:

$$
\begin{aligned}
&\min\ t \\
&\quad t \geq 0y1 - 2y2 + 2y3 \\
&\quad t \geq 5y1 + 4y2 - 3y3 \\
&\quad t \geq 2y1 + 3y2 - 4y3 \\
&\quad y1 + y2 + y3 = 1 \\
&\quad y1,\ y2,\ y3 \geq 0
\end{aligned}
$$

No caso geral, dada a matriz de ganhos

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & J2 & & \\
 & & E1 & \ldots & Ej & \ldots & En \\
 & E1 & p_{11} & \ldots & p_{1j} & \ldots & p_{1n} \\
J1 & Ei & p_{i1} & \ldots & p_{ij} & \ldots & p_{in} \\
 & Em & p_{m1} & \ldots & p_{mj} & \ldots & p_{mn}
\end{array},
$$

sendo x_i = probabilidade de J1 escolher a estratégia i, $i=1,\ldots,m$
y_j = probabilidade de J2 escolher a estratégia j, $j=1,\ldots,n$,

a estratégia ótima de J1 pode ser determinada resolvendo o PL

PL do jogador J1

max v

$$v <= p11\ x1 + \ldots + pi1\ xi + \ldots + pm1\ xm$$
$$\ldots$$
$$v <= p1j\ x1 + \ldots + pij\ xi + \ldots + pmj\ xm$$
$$\ldots$$

s.a:

$$v <= p1n\ x1 + \ldots + pin\ xi + \ldots + pmn\ xm$$

$$x1 + \ldots + xi + \ldots + xm = 1$$

$$x1, \ldots, xi, \ldots, xm >= 0$$

Analogamente, a estratégia ótima de **J2** pode ser determinada resolvendo o **PL**

PL do jogador J2

Min *t*

$$t >= p11\ y1 + \ldots + p1j\ yj + \ldots + p1n\ yn$$
$$\ldots$$
$$t >= pi1\ y1 + \ldots + pij\ yj + \ldots + pin\ yn$$
$$\ldots$$

s.a:

$$t >= pm1\ y1 + \ldots + pmj\ yj + \ldots + pmn\ yn$$

$$y1 + \ldots + yj + \ldots + yn = 1$$

$$y1, \ldots, yj, \ldots, yn >= 0$$

Conclusão:

1. Como o PL do J2 não é mais do que o dual do PL do J1, as estratégias ótimas de ambos os jogadores, bem como o valor do jogo, podem ser obtidas resolvendo apenas um dos problemas.

2. **Um jogo de 2 pessoas e soma nula tem sempre pelo menos uma solução de equilíbrio**.

Jogos de 2 pessoas e soma nula

→ soma constante

Jogos de 2 pessoas e soma não constante

- cooperativos
- não cooperativos

Jogos para n (>2) jogadores

- cooperativos
- não cooperativos

Jogos infinitos

Jogos iterativos