

Programação Multiobjetivo

Até agora, PL com um único objetivo:

- minimizar custo total,
- maximizar receita total,
- minimizar o desperdício,
- maximizar a eficiência total, ...

No entanto, na prática, existem frequentemente vários objetivos (contraditórios):

- melhorar a imagem da companhia
- minimizar os custos totais
- satisfazer um certo nível de emprego

1ºs trabalhos: década de 50

Formas de abordar mais do que um objetivo simultaneamente:

Para o decisor,

i) Há hierarquização ordinal de objetivos

Otimiza-se primeiro o objetivo de prioridade mais elevada; Otimiza-se então o segundo objetivo no conjunto de soluções admissíveis que eram ótimas para o primeiro objetivo (...)

Se o decisor estabelecer uma meta g_k para cada objetivo k e minimizar, pela mesma ordem de prioridade, os desvios relativos à meta estabelecida →
Programação por metas hierárquicas

ii) Há hierarquização cardinal de objetivos

O objetivo k tem um peso, w_k , ($k=1, \dots, r$) otimizando-se a soma ponderada dos objetivos → PL uniobjetivo

Após estabelecer uma meta para cada objetivo, otimiza-se a soma ponderada dos desvios relativamente às metas estabelecidas →
Programação por metas não hierárquicas

iii) Inexistência total de hierarquia de objetivos

Determinam-se soluções admissíveis para as quais não há nenhuma melhor
Otimização vetorial

Programação por metas: exemplo

A Dewright Company está a estudar a produção de três novos produtos, isto é, pretende saber qual a quantidade a produzir de cada um deles tendo em conta três fatores diferentes:

- lucro a longo prazo
- estabilidade da força de trabalho
- nível de investimento.

Pretende, se possível

- atingir um mínimo de 125 milhões de dólares de lucro
- manter o atual número de empregados
- que o investimento inicial seja, no máximo, de 55 milhões de dólares

A contribuição de cada produto para cada um dos objetivos é proporcional à taxa de produção, de acordo com o quadro

	contribuição unit. do produto			
	P1	P2	P3	
Lucro a longo prazo	12	9	15	≥ 125 (milhões dólares)
Nível de emprego	5	3	4	$= 40$ (centenas empreg.)
Investimento inicial	5	7	8	≤ 55 (milhões dólares)

Para o objetivo i ,

i) Estabelece-se uma meta numérica específica, g_i , e para cada meta g_i define-se

d_i^- = desvio, por defeito,
relativamente à meta fixada

d_i^+ = desvio, por excesso,
relativamente à meta fixada

ii) penalizam-se os desvios, relativamente às metas estabelecidas

e então,

procura-se uma solução que 'minimize os desvios'
(melhor solução de compromisso)

Metas \leftrightarrow restrições

restrições são impossibilidades
metas são valores desejáveis

? 'minimizar os desvios' ?

Vamos estudar duas versões:

1. metas não hierarquizadas -

todas as metas têm importância semelhante

- *solver (min. soma ponderada dos desvios)*

2. metas hierarquizadas

atribuem-se diferentes níveis de prioridade às diferentes metas, não devendo nunca uma meta de prioridade mais baixa ser atingida à custa de metas de prioridade mais alta

- *aplicações sucessivas do solver*

(resolução gráfica, nalguns casos particulares)

Formalização

- 1º Definir todas as variáveis de decisão e especificar as metas a atingir
- 2º Formalização das restrições
 - restrições de sinal
 - restrições funcionais
 - restrições relativas às metas
(expressam as relações entre as var. de decisão e as metas a atingir - variáveis de desvio)
- 3º Objetivo e função objetivo
a f.o. deve traduzir o posicionamento do decisor face às diferentes metas, estabelecendo-se para tal graus de prioridade e/ou ponderações.

Exemplo (versão1)

A Dewright Company está a estudar a produção de três novos produtos, isto é, pretende saber qual a quantidade a produzir de cada um deles tendo em conta três fatores diferentes:

- lucro a longo prazo
- estabilidade da força de trabalho
- nível de investimento.

Pretende

- atingir um mínimo de 125 milhões de dólares de lucro
- manter o atual número de empregados
- que o investimento inicial seja, no máximo, de 55 milhões de dólares

A administração da Dewright Company sabe que, provavelmente, não será possível atingir estas três metas simultaneamente, pelo que decidiu discutir as suas prioridades com diferentes responsáveis na empresa.

Decidiu-se

- penalizar 5, por cada milhão de lucro a menos
- penalizar 2, por cada centena de empregados que se contratarem de novo
- penalizar 4, por cada centena de empregados que se despedirem
- penalizar 3, por cada milhão de dólares de investimento a mais

A contribuição de cada produto para cada um dos objetivos é proporcional à taxa de produção, de acordo com o quadro

	contribuição unit. do produto			meta (unidades)	penalidade
	P1	P2	P3		
Lucro a longo prazo	12	9	15	≥ 125 (milhões dólares)	5/milhão abaixo
Nível de emprego	5	3	4	= 40 (centenas empreg.)	2/centena acima 4/centena abaixo
Investimento inicial	5	7	8	≤ 55 (milhões dólares)	3/milhao acima

Exemplo (versão2)

Após uma análise cuidadosa dos resultados obtidos pelo departamento de IO, a Administração da Dewright Company considera muito grave exceder em mais de 20% o nível de emprego pretendido, pois tal implicaria grandes custos de formação e, como esta situação é temporária, futuros despedimentos.

Por outro lado, pretende 'jogar pelo seguro' o mais possível, no que respeita ao investimento, isto é, quer tentar não ultrapassar a meta do investimento inicial.

Com base nestas considerações, atribuíram-se as seguintes prioridades às metas

<u>Nível de prioridade</u>	<u>Fator</u>	<u>meta</u>	<u>penalidade</u>
1ª prioridade	nível de emprego	≤ 40	2
	investimento	≤ 55	3
2ª prioridade	lucro longo prazo	≥ 125	5
	nível de emprego	≥ 40	4

Nestas condições, qual a melhor solução de compromisso?

Exemplo (problema de metas hierarquizadas)

Resolva graficamente o seguinte problema

$$\min z = P_1 (d_1^+) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^-)$$

$$s. a \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq 8 \\ x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 12 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 8 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \end{array} \right.$$

Exercícios

1. Uma empresa dispõe de 7200 u.m. para gastar na campanha publicitária de lançamento de um novo produto. Na campanha pretende usar telas de grande dimensão (cobertura de edifícios) e anúncios na rádio. Foi já decidido que o número de anúncios na rádio não pode exceder o número de telas e que estas serão, no máximo, 60. Cada tela custa 60 u.m. e cada anúncio na rádio custa 90 u.m.

Da experiência passada, sabe-se que o sucesso de um novo produto depende muito da campanha publicitária, pelo que se pretende gastar na campanha pelo menos 5400 u.m. Há também a convicção de que se deverão fazer pelo menos 50 anúncios na rádio e tentar-se-á também não exceder os 30 telas.

a) Consciente de que será muito difícil conseguir todas estas pretensões foi decidido penalizar da mesma forma cada 100 u.m. disponíveis e não gastas (abaixo das 5400), cada anúncio de rádio a menos do que o pretendido e cada 2 telas a mais do que as 30. Nestas condições, como deve ser feita a campanha publicitária?

b) Não tendo gostado da solução obtida anteriormente, a direcção da empresa definiu como prioridade máxima não fazer mais do que 30 telas. Como segunda prioridade fazer pelo menos os 50 anúncios na rádio e a terceira prioridade será gastar as 5400u.m. Como deve ser feita a campanha publicitária?

(Depois de formular o problema, resolva-o pelo *Solver* e também graficamente)

2. Considere o seguinte problema de otimização

$$\begin{array}{l} \min \quad z = P_1(d_1^+) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^- + d_3^+) \\ \text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ -2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 0 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Resolva-o (graficamente e com o *Solver*) e mostre que a solução não é independente da ordem de prioridades estabelecida (sugestão: troque a segunda e terceira prioridades).