Instituto Superior de Economia e Gestão

MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ECONOMIA E FINANÇAS

Época de Recurso 26/01/2012

As respostas devem ser dadas de forma clara e completa na folha de resposta. Adicionalmente, todos os cálculos e gráficos efectuados no Mathematica / Matlab devem ser entregues numa *pen* no final da prova, assinalando claramente a pergunta a que dizem respeito. Devem também ser entregues todos os programas e rotinas auxiliares que forem utilizados.

I - Equações e sistemas de equações não lineares

Considere a equação não linear $e^x - 4x = 0$.

(a) Localize graficamente as soluções desta equação, determinando intervalos de comprimento não superior a 0.5 que as contenham.

(b) Utilize o método da bicessão para calcular um valor aproximado das soluções da equação, com erro inferior a 0.5×10^{-7}, estimando previamente o número de iterações necessárias para atingir esse nível de precisão.

(c) Considerando a função iteradora $g(x) = e^x/4$ no intervalo $[0, 1/2]$, mostre que a menor solução positiva da equação pode ser determinada usando o método do ponto fixo. Através desse método determine a solução com erro inferior a 0.5×10^{-6}. Poderá a mesma função iteradora ser usada no intervalo $[2, 3]$ para aproximar a maior solução da equação ? Em caso negativo, proponha outra função $g(x)$ que permita resolver o problema.

II - Métodos para sistemas lineares

Considere o sistema linear, de 4 equações a 4 incógnitas, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Seja $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a solução do sistema se considerarmos um segundo membro $\tilde{\boldsymbol{b}} = (1, 1, 1, 1)$. Considerando $\alpha = 10$, calcule o número de condição da matriz A na norma $\|\cdot\|_\infty$ e, sem resolver o sistema, estime a percentagem de erro cometida ao usar $\tilde{\boldsymbol{b}}$ em vez de $\boldsymbol{b}$.

(b) Ainda com $\alpha = 10$, mostre que o método de Jacobi converge e utilize-o para calcular $\boldsymbol{x}$ com erro inferior a 0.5×10^{-6}.

(c) Para que valores de α é possível garantir a convergência do método de Jacobi? Será possível encontrar valores de α para os quais o método seja efectivamente divergente ? Quais ?

III - Interpolação, Aproximação e Integração

Considere a seguinte tabela de valores de uma função f, suficientemente regular.

x_i	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00
f_i	0.00	2.20	3.10	4.80	4.00	6.15	4.00

(a) Determine o polinómio interpolador de f nos pontos da tabela e utilize-o para obter uma estimativa para $f(3.5)$.

(b) Determine a função da forma $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin x$ que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados, utilizando-o para obter uma nova estimativa de $f(3.5)$.

(c) Determine um valor aproximado de $\int_1^7 f(x)\,dx$ usando os métodos dos trapézios e de Simpson compostos.

IV - Aplicação: Modelo de Crescimento Económico de Solow

Segundo o modelo de Solow, a evolução do rácio Capital / trabalho, pode ser ser descrita pela equação diferencial

$$\frac{dk}{dt} = s\,g(k) - \lambda k$$

em que s é a fracção da produção investida em capital, λ é a taxa de crescimento da força de trabalho e g é uma função definida a partir da função de produção. Se considerarmos uma função de produção de tipo Cobb-Douglas, por exemplo $f(K, L) = K^{1/3}L^{2/3}$, teremos que $g(k) = k^{1/3}$.

(a) Considere $s = 0.1, \lambda = 0.01$ e utilize o método de Euler para determinar soluções numéricas do modelo de Solow. Investigue o comportamento do modelo no longo prazo, para diversos valores iniciais $k(0) = k_0$

(b) Fixando $\lambda = 0.01$ e $k_0 = 10$, qual deve ser o valor de s de modo que o rácio capital / trabalho possa atingir o valor 300 ?