

1.3. Otimização de uma função objetivo, transformando as restantes em restrições

Prop: Consideremos

$$\begin{aligned} & \max z_1 = c_1 \cdot x \\ & \max z_2 = c_2 \cdot x \\ & \dots \\ \text{(P.O.V.)} \quad & \max z_r = c_r \cdot x \\ & \text{s.a: } x \in S \end{aligned}$$

Se, para algum k (entre 1 e r), x^* for solução ótima única do problema

$$\begin{aligned} & \max z_k(x) = c_k \cdot x \\ \text{(P}_k\text{)} \quad & \text{s.a: } x \in S \\ & z_i(x) \geq w_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad i \neq k \end{aligned}$$

em que w_i ($i = 1, \dots, r, \quad i \neq k$) são valores reais escolhidos de forma arbitrária, mas que não tornam vazia a região admissível de (P_k) ,

então x^* é solução eficiente do problema de otimização vetorial.

Obs: Naturalmente, podem existir soluções eficientes, entre as soluções que não forem únicas.

Mas, se x^* não for única só se pode garantir que é fracamente eficiente.

1.4. Otimização de uma soma ponderada das funções objetivo

Prop: Se x^* for solução ótima do problema

$$(P^{SP}) \quad \max z = \sum_{k=1}^r \lambda_k z_k(x), \quad \text{com } \lambda_k > 0, \quad \forall k = 1, \dots, r \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^r \lambda_k = 1, \\ \text{s.a. : } x \in S$$

então x^* é solução eficiente do problema de otimização vetorial.

Obs1: O resultado ainda é válido se se exigir apenas uma soma ponderada positiva e com apenas um dos coeficientes igual a 1 (em vez de soma dos coeficientes igual a 1).

Obs2: Se não se exigisse $\lambda_k > 0$ mas apenas $\lambda_k \geq 0$, poder-se-iam obter soluções fracamente eficientes.

Obs3: Naturalmente, diferentes vetores λ poderão originar a mesma solução eficiente. **Região de indiferença** para x é o conjunto de valores de λ que originam o mesmo ponto extremo eficiente x .

Decompor o espaço dos pesos é determinar as diferentes regiões de indiferença.

3.5. Minimização da distância de Tchebycheff a um ponto de referência

Veamos agora **como obter soluções não dominadas**, minimizando a distância da Reg. Adm. no espaço dos objetivos a um ponto de referência, segundo uma métrica especial (métrica de Tchebycheff, pesada e aumentada).

Em geral, o ponto de referência escolhido é o ponto ideal.

Uma *métrica* é uma função que mede a distância entre dois pontos de R^n , z' e z'' .

Costuma designar-se por

$$\|z' - z''\|.$$

Pode tomar várias formas, desde que verifique os seguintes axiomas

- (i) $\|z' - z''\| \geq 0$
- (ii) $\|z' - z''\| = \|z'' - z'\|$
- (iii) $\|z' - z''\| \leq \|z' - z'''\| + \|z''' - z''\|$, $\forall z', z'', z''' \in R^n$
- (iv) $\|z' - z''\| = 0$ sse $z' = z''$

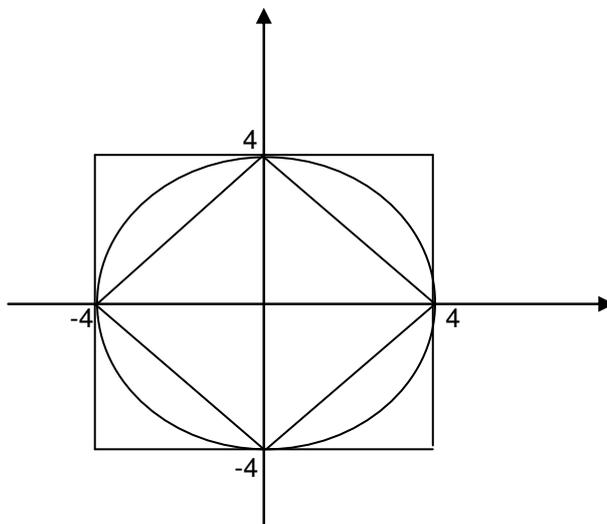
Uma família de métricas frequentemente utilizada é a família L_p :

$$\|z' - z''\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |z'_k - z''_k|^p}, \quad \text{em que } p \in \mathbb{N} \text{ ou } p = +\infty.$$

Obs: $\|z' - z''\|_1 = \sum_{k=1}^n |z'_k - z''_k|$ (distância *Manhatan*)

$$\|z' - z''\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z'_k - z''_k|^2} \quad (\text{distância } \textit{Euclideana})$$

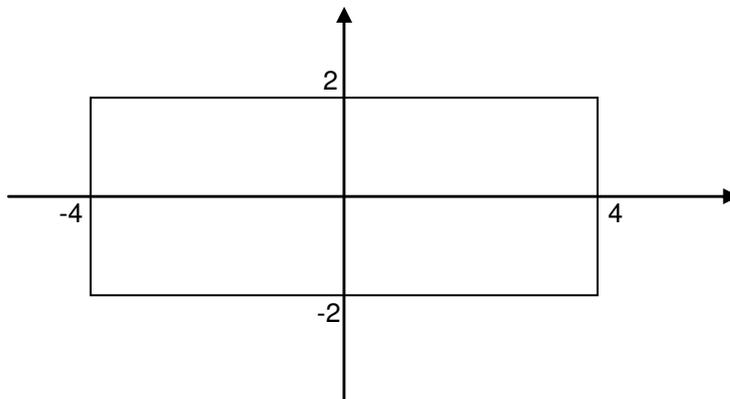
$$\|z' - z''\|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} |z'_k - z''_k| \quad (\text{distância } \textit{Tchebycheff})$$



Existe uma família de métricas um pouco mais gerais do que as métricas L_p , que é a *família de métricas L_p ponderadas*, L_p^λ :

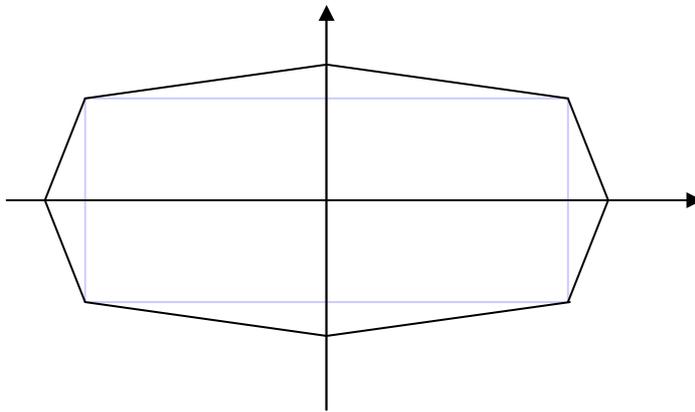
$$\|z' - z''\|_p^\lambda = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n \lambda_k |z'_k - z''_k|^p}, \quad \text{em que } p \in \mathbb{N} \text{ ou } p = +\infty,$$
$$\lambda_k \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Obs: L_∞^λ - *métrica de Tchebycheff pesada*

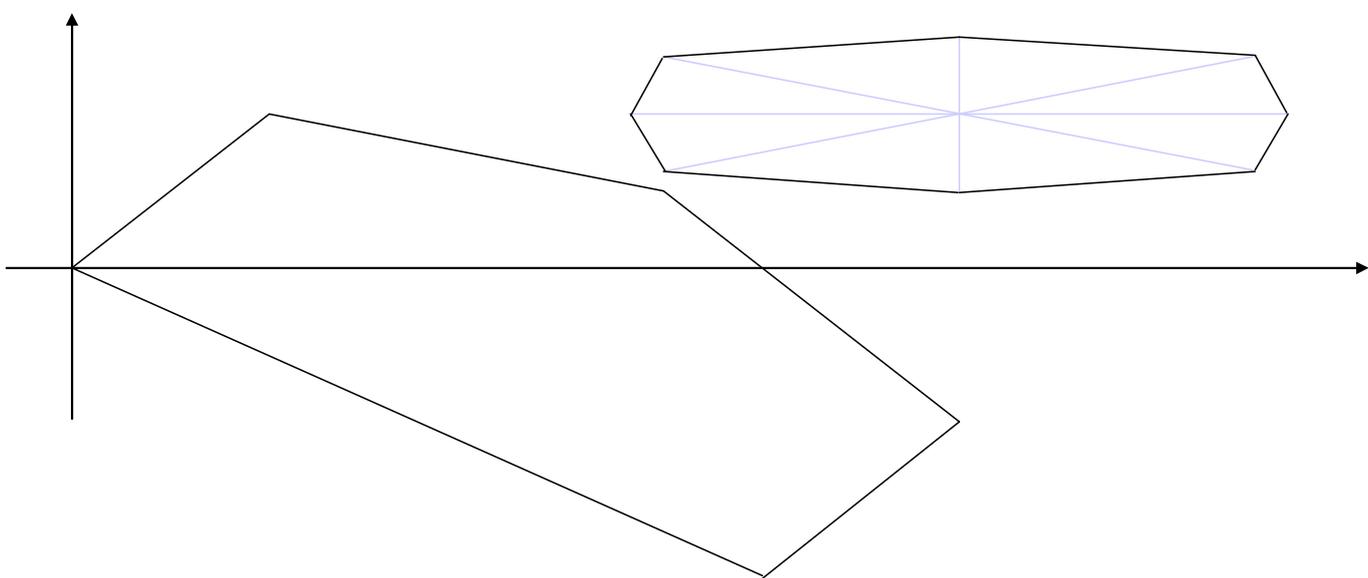
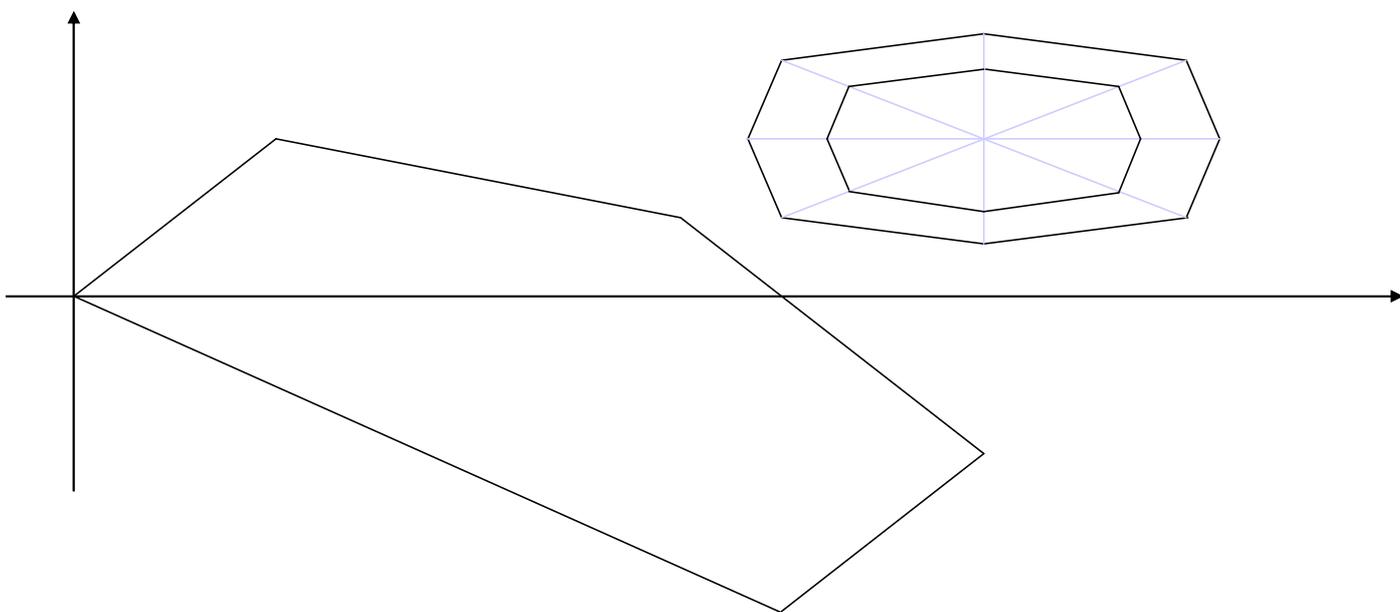


E finalmente, a **métrica de Tchebycheff pesada e aumentada**, $L_{\infty}^{\lambda \varepsilon}$ é definida por

$$\|z' - z''\|_{\infty}^{\lambda \varepsilon} = \|z' - z''\|_{\infty}^{\lambda} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k |z'_k - z''_k|, \quad \varepsilon_k > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$



Prop: Se se minimizar uma distância de Tchebycheff pesada e aumentada entre a região admissível no espaço dos objetivos e o ponto ideal, obtém-se uma solução não dominada.



2. Métodos interativos

Em PL multiobjetivo, não basta gerar soluções eficientes

- esforço computacional enorme
- proposta ao decisor de ‘demasiadas’ soluções eficientes
(centenas ou milhares de sol.s,
ainda q se restrinja apenas aos pontos extremos eficientes)



Métodos Interativos (STEM, Zionts e Wallenious,...)

Método de STEM

- a RA vai sendo reduzida, progressivamente
 - em cada iteração,
 - o decisor especifica uma quantidade que esteja disposto a sacrificar, numa f.o. cujo valor considere mais satisfatório, de modo a conseguir melhorar os valores de f.o. que ainda não o satisfaçam
- (minimizando a distancia de Tchebycheff ao ponto ideal, com ponderadores baseados na tabela de payoff)

Método de Zionts e Wallenius

- minimização da soma ponderada das funções objetivo, reduzindo progressivamente o espaço dos pesos